

# Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

[www.joom.org.mx](http://www.joom.org.mx)

Ciudad de México, México. No. 4. Enero-Junio 2021

## OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Algunas notas sobre la existencia de las formas metapléticas cúbicas.**  
*Francisco Guillermo Herrera Armendia.*
- **Matrices: Una descripción general de sus operaciones y tipos.**  
*Mateos Sánchez Areli Guadalupe.*

## OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Propuesta de modelos matemáticos para economía, educación y salud: Enfoque global.**  
*Fernando Gustavo Isa Massa.*
- **Sistema de conteo y reconocimiento de objetos con RNAs.**  
*Marcos Fajardo Rendón.*
- **Aproximación del valor de la aceleración de la gravedad en la colonia el Rosario, Azcapotzalco CDMX a través de un péndulo simple casero**  
*Jaime William Flores Tecalco.*
- **La unidad musical  $\mathfrak{M} = 2^{1/12}$  y una posible representación en el campo complejo  $\mathbb{C}$ .**  
*Francisco Guillermo Herrera Armendia.*

**Francisco Guillermo Herrera Armendia**  
Editor en Jefe.  
[herrera@joom.org.mx](mailto:herrera@joom.org.mx)

**Marcos Fajardo Rendón**  
Editor Ejecutivo.  
[fajardo@joom.org.mx](mailto:fajardo@joom.org.mx)  
**Isaac Villavicencio Gómez**  
Coordinador Editorial.  
[villavicencio@joom.org.mx](mailto:villavicencio@joom.org.mx)

#### CONSEJO PERIODISTA

*Efraín Valencia Calzadilla*  
*Sealtiel Pichardo Jiménez*  
*Gregorio Montes de Oca Godinez*  
*Areli Guadalupe Mateos Sanchez*

#### COMITÉ CIENTÍFICO

*Vitaliano Acevedo Silva*  
*Marleny Hernández Escobar*  
*Enrique Salazar Peña*  
*María de Jesús Sentiés Nacaspac*  
*Raciel Trejo Reséndiz*

#### PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

**Webmaster**  
*Marcos Fajardo Rendón*

**Web Designer**  
*Juan Carlos Olivo Moya*

**JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS**, No. 4, Enero-Junio 2021 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, [www.joom.org.mx](http://www.joom.org.mx), [revistajoom@gmail.com](mailto:revistajoom@gmail.com).  
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.  
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.  
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 10 de junio de 2021.

# *Journal de* *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

*Número 4.*

*Enero-Junio de 2021*

*Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

*Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 4, enero-junio de 2021, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

# Contenido

<b>Carta del Editor</b>	<b>3</b>
<b>OBJETOS MATEMÁTICOS</b>	
<b>Algunas notas sobre la existencia de las formas metaplécticas cúbicas.</b> <i>Some notes on the existence of cubic metaplectic forms.</i> <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	<b>7</b>
<b>Matrices: Una descripción general de sus operaciones y tipos.</b> <i>Arrays: An overview of their operations and types.</i> <i>Mateos Sánchez Areli Guadalupe.</i>	<b>12</b>
<b>OBJETIVOS MATEMÁTICOS</b>	
<b>Propuesta de modelos matemáticos para economía, educación y salud: Enfoque global.</b> <i>Proposal of mathematical models for economics, education and health: Global approach.</i> <i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	<b>14</b>
<b>Sistema de conteo y reconocimiento de objetos con RNAs.</b> <i>Counting and recognizing objects system using ANNs.</i> <i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	<b>19</b>
<b>Aproximación del valor de la aceleración de la gravedad en la colonia el Rosario, Azcapotzalco CDMX a través de un péndulo simple casero.</b> <i>Approximation of the acceleration value of gravity in the el Rosario, Azcapotzalco CDMX through simple homemade pendulum.</i> <i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	<b>24</b>
<b>La unidad musical <math>\mathfrak{M} = 2^{1/12}</math> y una posible representación en el campo complejo <math>\mathbb{C}</math>.</b> <i>The musical unit <math>\mathfrak{M} = 2^{1/12}</math> and a possible representation in the complex field <math>\mathbb{C}</math>.</i> <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	<b>31</b>

## CARTA DEL EDITOR

Una característica de esta Carta Editorial es mencionar algunos acontecimientos relacionados con el conocimiento matemático y áreas afines, a nivel nacional e internacional. Este año 2021 tiene la misma secuencia de días en el calendario que los años 1965 y 1976 (a partir del 1 de marzo por ser bisiesto), además de muchos años más. Sin embargo, en este cuarto número de la revista JOOM decidimos centrarnos en describir brevemente sucesos solo de estos dos años recientes y compartimos del archivo bibliográfico lo siguiente.

En 1965 se publica un interesante artículo de Tomio Kubota de Nagoya, Japón. En su escrito (que ha sentado una de las bases para la investigación en matemática pura en los últimos años en este tema) propone la prueba de un teorema simple que muestra que la reciprocidad de una potencia en general se incorpora en la teoría algebraica de números y además es esencialmente un enunciado aritmético sobre un grupo de matrices. Tal como lo mencionó el autor en un artículo anterior sobre las formas modulares para los grupos de Picard, se puede usar el teorema propuesto para construir esas funciones en espacios simétricos adecuados que están conectados a residuos de potencia de cualquier grado. Además, estas ideas proporcionan una explicación teórica del hecho de que la ley de reciprocidad cuadrática puede probarse en cualquier campo numérico mediante funciones theta. En años más recientes Nikolai Proskurin colaborador en el Instituto de Matemáticas de San Petersburgo de la Academia de Ciencias Rusa, continúa el trabajo de Kubota y lo deja plasmado en su maravillosa obra titulada “Formas Metapléticas Cubicas y las Funciones Theta”, publicada por el prestigiado sello editorial Springer.

Durante 1976 se escribieron y enviaron artículos, para revisión, a la “Revista para la divulgación de la Matemática” publicada por el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Checoslovaquia, actualmente República Checa. La edición estuvo a cargo de F. Zitek, con el apoyo en la edición ejecutiva de V. L. Dolezal, en el número 3 del año 103.

El primer artículo recibido por el comité editorial el lunes 8 de marzo de 1976, escrito por Miloslav Jůza, de Praga, se titula “Dos medidas especiales en el Espacio  $E_2$ ” (en francés) y cuyo propósito es el estudio de la definición de la noción de medida exterior hecha por Constantin Carathéodory, estudiada posteriormente por F. Hausdorff y relacionada con los diferentes tipos de medidas exteriores, cuyo estudio continuarían H. Federer en 1969 y C. A. Rogers en 1970. Una consecuencia de los resultados obtenidos muestra que al examinar las singularidades de las soluciones de las ecuaciones con derivadas parciales, a veces se requieren medidas especiales, además de la relación que existe entre dos medidas de este tipo.

El siguiente artículo recibido el lunes 24 de mayo escrito por Zdenek Dostal, de la ciudad de Ostrava, se titula “Singularidad del operador que limita  $C(H_n, r, n)$ ” (en inglés) y cuyo objetivo es mostrar que el operador  $A$  es único, con la condición: Si  $B \in L(H_n)$  es algún operador que satisface la Teoría Ideal para las Retículas, propuesta por Vlastimil Pták en 1968, entonces existe un operador unitario  $U \in L(H_n)$  y una unidad compleja  $\varepsilon | \varepsilon A = U^* B U$ . para ello, el autor ofrece las siguientes definiciones: Sea  $r$  un número real fijo en el intervalo

$0 < r < 1$ ; sea  $n$  un número natural también fijo.  $L(H_n)$  denota el álgebra de todos los operadores lineales sobre un espacio de Hilbert  $n$ -dimensional  $H_n$ ;  $|A|$  es la norma del operador;  $|A|_\sigma$  representa el radio espectral de  $A \in L(H_n)$ . Definición:  $C(H_n, r, M) = \sup \{|A^m| : A \in L(H_n), |A|_\sigma \leq r, |A| \leq 1\}$  cantidad que une lo anterior con el exponente crítico, introducida por Piták en su artículo “Radio Espectral, normas de iteraciones y el Exponente Crítico” de 1968. También este investigador encontró un cierto operador  $A \in L(H_n)$ , que satisface:  $C(H_n, r, M) = |A^n|, |A|_n \leq r, |A| \leq 1$ .

El siguiente artículo, recibido el miércoles 30 de junio y escrito por Jaromir Krys, de la ciudad de Hradec Králové y titulado “La configuración en el espacio  $A_{mk}$  como consecuencia del uso de la configuración en el espacio  $A_k$ ” (en checo). El autor propone en primera instancia la creación de un determinado modelo de espacio  $A_{mk}$  con la ayuda del espacio  $A_k$  (espacio de puntos afines, cuyo foco es un espacio vectorial de dimensión  $k$  sobre el cuerpo de los números reales). Estos objetos matemáticos han sido generalizados por el mismo autor en 1975 y 1976, publicados en alemán con el título: configuraciones en el espacio  $A_{mk}$ , que se derivan con la ayuda de las configuraciones en el espacio  $A_k$ . Cabe señalar que este autor colaboraba en ese entonces como profesor de matemáticas en la facultad de Pedagogía de esa ciudad.

Una siguiente contribución recibida el miércoles 11 de agosto, se debe a Josef Niederle, de la ciudad de Brno, titulada “Bicomplementos relativos y la propiedad de la extensión de tolerancia en retículas distributivas” (en inglés). Con base en el resultado bien conocido de A. Day quien propone: Si  $L$  es una subretícula de una retícula distributiva  $D$ , entonces toda relación de congruencia sobre  $L$  se debe a una relación de congruencia sobre toda la retícula distributiva  $D$ . Por ello, el propósito de su artículo es otorgar una caracterización al par  $[D, L]$  tal que toda relación de tolerancia compatible sobre  $L$  también se pueda extender sobre  $D$ .

Otro artículo más fue recibido también el miércoles 11 de agosto, cuyo autor es Ivan Chajda, de la ciudad de Prerov y titulado “Notas sobre congruencias de Retículas” (en inglés). El autor parte del hecho bien conocido acerca de que todo ideal de una retícula  $L$  es un núcleo de al menos una relación de congruencia sobre  $L$  sí y solo si  $L$  es distributiva y que entonces existe una correspondencia inyectiva entre las congruencias y los ideales a través de retículas distributivas relativamente complementarias. Es así, que una aproximación adoptada del mismo autor hace posible investigar la relación entre las congruencias y los ideales para las retículas modulares.

Ilja Cerný, de Praga escribe la siguiente colaboración, recibida el jueves 16 de septiembre titulada “Cortes en las regiones simplemente conectadas y el ordenamiento cíclico del sistema de todos los elementos frontera” (en inglés). Los objetos matemáticos los describe el autor en el Campo Complejo que denomina  $\mathbf{S}$ , además del Plano Complejo abierto  $\mathbf{E}$ . Por la vecindad de un punto  $z \in \mathbf{E}$  significa la siguiente igualdad: para cualquier círculo  $U(z, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbf{E}; |\zeta - z| < \varepsilon\}$  con  $\varepsilon \in (0, \infty)$ ; ahora, la vecindad del punto  $\infty$  se describe con los conjuntos  $U(\infty, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathbf{S}; |\zeta| > \varepsilon^{-1}; \varepsilon \in (0, \infty)$ . Las vecindades de los puntos  $z \in \mathbf{S}$  el autor los denota con la expresión  $U(z)$ . Además incluye en su artículo al conjunto de

los números naturales  $\mathbf{N}$ , al círculo unitario que denota por  $\mathbf{U} = U(0,1)$ ; la circunferencia unitaria  $\mathbf{C} = \partial\mathbf{U}$ ; la métrica en  $\mathbf{S}$  denotada  $m^*$  obtenida al transferir la métrica cartesiana del espacio euclidiano tridimensional sobre  $\mathbf{S}$ , por medio de la proyección estereográfica de la esfera unitaria. El autor presenta el concepto matemático de Ligaduras Superiores Topológicas de una secuencia de puntos  $z_n \in \mathbf{S}$  o conjuntos no vacíos  $M_n \subset \mathbf{S}$ .

La penúltima colaboración escrita ese año la realizó Milan Koman de Praga, recibida por el comité editorial el jueves 7 de octubre titulada “Nuevos límites superiores para el cruce de números  $K_n$  en la botella de Klein” (en inglés). En el artículo el autor da a conocer sus investigaciones relacionadas con el número de cruzamientos de un grafo  $G$  para superficies orientables o no con el genus  $g$  y que se define con el menor número de estos cruzamientos en un esquema de  $G$  sobre la superficie mencionada. Presenta la notación utilizada para describir una superficie orientable  $cr_g^*$ , y una superficie no orientable  $cr_g$ ,  $g = 1, 2, 3, \dots$ , además de incluir breves resultados importantes en orden cronológico de los autores Zarankiewicz (1954); Urbanik (1955), Guy (1960), Harary y Hill (1962), Blazek y Koman (1963), Saaty (1964), Guy, Jenkyns y Schaer (1967), Blazek y Koman (1967), Harborth (1971), Guy y Jenkyns (1969), Koman (1969), Guy y Hill (1973), Koman (1973).

La última contribución escrita en 1976 la envió Bohdan Zelinka de la ciudad checa de Liberec, recibido el lunes 25 de octubre titulado “Sobre un problema de R. Häggkvist relacionado con la coloración de los bordes en los grafos” (en inglés). Durante el quinto coloquio Húngaro sobre combinatoria celebrado en la ciudad de Keszthely del lunes 28 de junio al sábado 3 de julio de 1976, el autor mencionado en el título del artículo propuso el siguiente problema: “Sean  $Q(n, g)$  el conjunto de las  $n -$  líneas coloreadas de  $G$ ;  $q \in Q(n, g)$ . Define además  $L(q)$  como la longitud máxima y  $l(q)$  como la longitud mínima de un ciclo con vértices a partir de 2 de estas  $q$ 's clases de líneas coloreadas. Entonces  $L(n, G) = \min_{q \in Q(n, G)} L(q)$ ,  $l(n, G) = \max_{q \in Q(n, G)} l(q)$ . Dados los bordes sobre  $L(n, G)$  y  $l(n, G)$  para los grafos razonablemente definidos  $G$ . ¿Es, en especial,  $L(n, K_{n,n}) = 2n$ ? Zelinka da a conocer su estudio sobre  $L(n, K_{n,n})$  en que  $n$  es una potencia de 2. Además propone intercambiar el término “línea” por “borde”. Este número 3 de la revista se completa con otros tres artículos más, pero escritos y enviados en 1977. Se incluyen además breves características de los artículos publicados en este número en lengua extranjera (la revista es escrita originalmente en checo).

En este número 4 del JOOM hemos incluido las siguientes colaboraciones. En la sección de Objetos matemáticos se publican dos artículos; el primero de ellos titulado “Algunas notas sobre la existencia de las formas metapléticas cúbicas” en el que se mencionan definiciones y proposiciones que justifican el hilado semántico del significado de este objeto matemático, el segundo artículo denominado “Matrices: Una descripción general de sus operaciones y tipos” en que se incluye una perspectiva general de este objeto matemático que posee mucha eficiencia en su uso.

En la sección Objetivos matemáticos se han incluido las siguientes aportaciones: “Propuesta de modelos matemáticos para economía, educación y salud: Enfoque global”, en

él se proponen modelos matemáticos que contribuyen y ayudan a entender los fenómenos relacionados con estas ramas del conocimiento. La siguiente aportación se titula “Sistema de conteo y reconocimiento de objetos con RNAs” en el que se describen los principios del reconocimiento de patrones, las técnicas de desarrollo, los algoritmos y la simulación, además de la programación de un sistema de reconocimiento y conteo de objetos con ayuda del programa MATLAB. Enseguida aparece el artículo denominado “Aproximación del valor de la aceleración de la gravedad en la colonia el Rosario, Azcapotzalco CDMX a través de un péndulo simple casero”. Se describe una forma sencilla para obtener la aproximación al valor de la aceleración gravitacional en esta parte de la zona Noroeste del Valle de México, con base en el montaje de un péndulo simple de fabricación casera. También se muestran breves deducciones de las expresiones matemáticas que describen el movimiento armónico simple y el péndulo simple. Al final se ha incluido el artículo titulado “La Unidad Musical  $\mathfrak{M} = 2^{1/12}$  y una posible representación en el campo complejo  $\mathbb{C}$ ”, en el que se expone la posibilidad de representar la unidad musical en el campo de los números complejos analizando el Teorema de DeMoivre y la obra “El clavecín bien temperado” de J. S. Bach.

*Los editores.*

# Algunas notas sobre la existencia de las formas metaplécticas cúbicas.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,  
02420 CDMX, México.  
harmendia@gmail.com

**Resumen-** La estructura del presente artículo se basa en la lógica semántica de la matemática. El propósito fundamental es justificar la existencia, como objeto matemático, de las formas metaplécticas cúbicas. Incluye 21 definiciones, 6 proposiciones y 10 notas aclaratorias que hilan el discurso desde un punto de vista objetivo. El tema es muy reciente, lo que permite retomar la investigación desde un punto de vista basado en el método genético y generar un abanico de posibilidades para continuar con la presente investigación.

**Palabras Clave-** Campo complejo, espacio hiperbólico, involución, espacio lineal especial.

**Zusammenfassung-** Der Aufbau dieses Artikels basiert auf der semantischen Logik der Mathematik. Der grundlegende Zweck besteht darin, die Existenz der kubischen metaplektischen Formen als mathematisches Objekt zu rechtfertigen. Es enthält 21 Definitionen, 6 Sätze und 10 erläuternde Anmerkungen, die die Rede aus objektiver Sicht zusammenfassen. Das Thema ist sehr jung, was es erlaubt, die Untersuchung aus Sicht der genetischen Methode wieder aufzunehmen und eine Reihe von Möglichkeiten zur Fortsetzung der vorliegenden Untersuchung zu generieren.

**Stelutwoorden-** Komplexes Feld, hyperbolischer Raum, Involution, spezieller linearer Raum.

**Резюме,** Структура- статьи основана на семантической логике математики. Основная цель - оправдать существование как математического объекта кубических метаплектических форм. Он включает 21 определение, 6 предположений и 10 пояснительных примечаний, которые объединяют речь с объективной точки зрения. Этот предмет возник совсем недавно, что позволяет возобновить расследование с точки зрения, основанной на генетическом методе, и создать ряд возможностей для продолжения настоящего расследования.

**claveles palabras-** Комплексное поле, гиперболическое пространство, инволюция, специальное линейное пространство.

**Mathematical Subject Classification:** 08A05.

## I. INTRODUCCIÓN

El objeto matemático de estudio en el presente artículo tiene una historia relativamente reciente, pues su origen se remonta al artículo escrito en lenguaje alemán y publicado en 1965 por Tomio Kubota en Nagoya, Japón. El objeto matemático que da inicio a estas notas es un número algebraico  $F$ , totalmente imaginario y que contiene al grupo completo de las  $m^{-ésimas}$  raíces de la unidad. La estructura del presente artículo la he basado en la excelente obra del autor soviético Nikolai Proskurin, quien escribe maravillosamente sobre las Formas Metaplécticas Cúbicas y su relación con la funciones Theta. La publicación data de 1998. El grupo de raíces antes mencionado tiene la forma

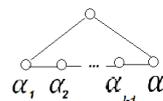
$\mu_m(F)$ . Otro objeto que justifica la existencia de las formas metaplécticas cúbicas es el subgrupo de congruencia principal  $\Gamma_{princ}^{(n)}(q)$ , en el módulo ideal  $q$ .

## II. CONDICIONES NECESARIAS.

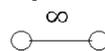
**Definición (Def.) 1.-** El Grupo Lineal Especial  $SL(2, \mathbb{C})$  es un simple Grupo de Lie complejo de tipo  $A_1$ , de acuerdo con la clasificación Cartan – Killing [1]. Algunas características propias de este tipo [2] son:

- a)  $V$  es el hiperplano de  $E = \mathbb{R}^{l+1}$  y que consiste en los puntos cuya suma de coordenadas es cero.
- b) **Raíces:**  $\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j; 1 \leq i \leq l+1, 1 \leq j \leq l+1$ .
- c) **Número de raíces:**  $n = l(l+1)$ .
- d) **Bases:**  $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_l = \epsilon_l - \epsilon_{l+1}$
- e) **Raíces Positivas:**  $\epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k \quad (1 \leq i < j \leq l+1)$ .
- f) **Número de Coxeter:**  $h = l+1$ .
- g) **Raíz Superior:**  $\bar{\alpha} = \epsilon_1 - \epsilon_{l+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = \omega_1 + \omega_l$ .

El grafo completado de Dynkin ( $l \geq 2$ ):



Para  $l = 1$ , el grafo de Coxeter del Grupo afin de Weyl es:



h)  $R^\sim$  (sistema de raíces inversas) =  $R$ ,

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{2(l+1)}, \gamma(R) = (l+1)^2.$$

i) Pesos fundamentales:

$$\omega_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i - \frac{i}{l+1} \sum_{j=1}^{l+1} \varepsilon_j = \frac{1}{l+1} [(l-i+1)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (i-1)\alpha_{i-1}) + i((l-i+1)\alpha_i + (l-i)\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_l)].$$

j) Suma de raíces positivas:

$$2\rho = l\varepsilon_1 + (l-2)\varepsilon_2 + (l-4)\varepsilon_3 + \dots + (l-2n)\varepsilon_l - l\varepsilon_{l+1} = l\varepsilon_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \dots + i(l-i+1)\alpha_i + \dots + l\alpha_l.$$

k)  $Q(\mathbf{R})$  es el conjunto de vectores cuyas coordenadas son enteros con suma cero.

$P(\mathbf{R})$  se genera con  $Q(\mathbf{R})$  y con  $\varepsilon_1 - (l+1)^{-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{l+1})$ .

$\frac{P(\mathbf{R})}{Q(\mathbf{R})}$  es isomorfo a  $\frac{\mathbb{Z}}{(l+1)\mathbb{Z}}$ .

El índice de conexión es:  $l+1$ .

Exponentes:  $1, 2, \dots, l$ .

l)  $W(\mathbf{R}) = \mathfrak{S}_{l+1}$  se identifica con el grupo de permutaciones de  $\varepsilon_i$ .

El orden de  $W(\mathbf{R}) = (l+1)!$

m)  $l=1: A(\mathbf{R}) = W(\mathbf{R}); \mathbf{w}_0 = -\mathbf{1}$ .

$l \geq 2: A(\mathbf{R}) = W(\mathbf{R})X\{1, -1\}$ , además  $\mathbf{w}_0$  transforma  $\alpha_i$  en  $-\alpha_{l+1-i}$

n) El grupo  $\frac{P(\mathbf{R}^-)}{Q(\mathbf{R}^-)}$  es cíclico con orden  $(l+1)$  y además actúa sobre el grafo completado de Dynkin con permutaciones circulares.

Si  $l \geq 2$  el único elemento no idéntico de  $\frac{A(\mathbf{R})}{W(\mathbf{R})}$  actúa sobre

$\frac{P(\mathbf{R})}{Q(\mathbf{R})}$  por el automorfismo  $x \mapsto -x$ .

ñ) La matriz de Cartan ( $l \times l$ ) es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Def. 2. Sea  $SU(2)$  un subgrupo compacto máximo de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Proposición 1.- Existe el espacio simétrico  $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{SU(2)}$ .

Prueba. Por en la Descomposición de Iwasawa [3],  $SL(2, \mathbb{C}) = NAK$ , donde:

i)  $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$

ii)  $A = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

iii)  $K = SU(2)$ .

Consecuencia 1.- Se tiene el mapeo:

$$(z, v) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{pmatrix} SU(2), z \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}_+^*$$

que es un isomorfismo de  $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{SU(2)}$ .

Consecuencia 2.- Se tiene el espacio hiperbólico

$$\mathbf{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$$

como variedades analíticas reales ■

El hecho de las translaciones por la izquierda del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre  $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{SU(2)}$  implica la transferencia sobre el espacio

hiperbólico con base en este isomorfismo.

Def. 3.- Sea  $\gamma w$  la imagen de  $w$  bajo  $\gamma$ .

$$\gamma w = \left( \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}v^2}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2}, \frac{v}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2} \right)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow w = (z, v) \in \mathbf{H}.$$

Para  $w = (z, v) \in \mathbf{H}, w' = (z', v') \in \mathbf{H}$ , se tiene:

$$x = \mathcal{R}(z), y = \mathcal{F}(z), x' = \mathcal{R}(z'), y' = \mathcal{F}(z').$$

Además:

$$k(w, w') = [(x-x')^2 + (y-y')^2(v-v')^2] \cdot (2vv')^{-1}$$

Def. 4.-  $k: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$  representa un par de puntos invariante, debido a que  $k(\delta w, \delta w') = k(w, w') \forall w, w' \in \mathbf{H} \wedge \delta \in SL(2, \mathbb{C})$ .

Def. 5.- La asociación del espacio hiperbólico  $\mathbf{H}$  con la métrica Riemanniana y la línea elemental  $\frac{dx^2+dy^2+dv^2}{v^2}$  es un espacio de Lovachevsky [4], o sea, un espacio tridimensional hiperbólico.

i) Para la distancia hiperbólica:  $\cosh d(w, w') = k(w, w') + 1 \mid w, w' \in \mathbf{H}$ , denotada por  $d(\cdot, \cdot)[1]$ .

ii) Para el coseno hiperbólico:  $\cosh$ .

iii) Esta métrica es  $SL(2, \mathbb{C})$  - invariante.

El grupo de orientación que conserva isometrías de  $\mathbf{H}$  es el cociente del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  por su centro [5].

Consecuencia 3.- El grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  actúa sobre la línea proyectiva compleja  $P_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  por medio de las transformaciones lineales fraccionales:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d} \mid z \in P_{\mathbb{C}}^1.$$

Donde  $P_{\mathbb{C}}^1$  es el límite frontera de  $\mathbf{H}$ , o más precisamente  $\mathbf{H}$  es considerado como el semi - espacio envuelto por el plano  $\{z, 0\} \mid z \in \mathbb{C}$  en el espacio euclidiano  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ .

Consecuencia 4.- Por Def. 3, y al tener  $v=0$ , se induce la acción de  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre el plano extendido  $\{z, 0\} \mid z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con lo que se identifica a  $P_{\mathbb{C}}^1$  por  $\{z, 0\} \mapsto z, \infty \mapsto \infty$ , con base en las transformaciones lineales fraccionales.

Consecuencia 5.- La acción de  $SL(2, C)$  es expandible sobre  $\mathbf{H}$  a través de un grupo lineal General  $\frac{GL(2, C)}{Z(2)SU(2)}$  con origen en  $Z(2)\{diag(t, t) | t \in \mathbb{C}^*\}$ , de este grupo, de tal forma que ahora la Def. 3 se reescribe [1]:

$$\gamma w = \left( \frac{(az + b)\overline{(cz + b)} + a\bar{c}v^2}{|cz + d|^2 + |c|^2v^2}, \frac{v}{|cz + d|^2 + |c|^2v^2} \right) \quad \text{ii)}$$

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, C) \rightarrow w = (z, v) \in \mathbf{H}$ . La acción es común de las matrices en  $Z(2)$  sobre  $\mathbf{H}$ .

Def. 6.- Sea  $D_{L-B}$  el operador diferencial de segundo orden (Laplace – Beltrami) [1]:

$$D_{L-B} = -v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + v \frac{\partial}{\partial v}, x = \mathcal{R}(z),$$

$y = \mathcal{F}(z)$ .

Nota 1.-  $D_{L-B}$  tiene como característica además de ser un factor constante, es también el único operador diferencial de segundo orden que es invariante, en el sentido de que su acción sobre las funciones de tipo  $\mathbb{C}^\infty \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$  conmuta con la acción de  $SL(2, C)$  sobre el plano hiperbólico  $\mathbf{H}$ . También este operador genera el álgebra de todas las invariantes de los operadores diferenciales sobre  $\mathbf{H}$ .

Def. 7.- Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de  $SL(2, C)$ .

Consecuencia 6.- Todo elemento  $\gamma \in \Gamma$  posee una vecindad que no contiene a ninguno de los elementos del conjunto  $\Gamma$ , excepto  $\gamma$ , en sí mismo, es decir:  $\exists \varepsilon \in \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

Def. 8.- Sea  $\Gamma_\varepsilon$  el estabilizador de  $\varepsilon$  en  $\Gamma$ . Se tiene la expresión:  $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \Gamma | \gamma\varepsilon = \varepsilon\}$ , que justifica que  $\Gamma_\varepsilon$  es un subgrupo de  $\Gamma$ .

Def. 9. Sea  $B$  el grupo matricial triangular superior en  $SL(2, C)$  y  $\sigma \in SL(2, C)$  cualquier matriz, tal que  $\sigma\infty = \varepsilon$ . Entonces, se tiene:

$\Gamma_\infty = \Gamma \cap B$ ; además, para cualquier  $\varepsilon$ , se tiene:  
 $\Gamma_\varepsilon = \sigma B \sigma^{-1} \cap \Gamma$ .

Def. 10.-  $\varepsilon$  es una cúspide de  $\Gamma$ , si:

$$\left\{ \sigma \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} \mid z \in \Lambda \right\} \subset \Gamma_\varepsilon, \text{ para cualquier retícula } \Lambda_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Consecuencia 7.- Equivalencia de cúspides.

Si  $\varepsilon$  es la cúspide de  $\Gamma$ ,  $\delta \in \Gamma$  y  $\varepsilon' = \delta\varepsilon$ , entonces  $\varepsilon'$  es también una cúspide de  $\Gamma$ . Por ello  $\varepsilon$  es equivalente a  $\varepsilon'$ . Esto genera una acción del grupo  $\Gamma$  sobre el conjunto  $\mathbf{P}(\Gamma)$  en sus cúspides. Además  $\mathbf{P}(\Gamma)$  se dividen en  $\Gamma$  - orbitas que consisten de cúspides equivalentes.

Def. 11.- Sean  $\tilde{\mathcal{K}}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  un homomorfismo con valores en el círculo unitario (carácter unitario) y  $\Gamma$  un subgrupo discreto de  $SL(2, C)$ . Entonces  $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$  es automórfica bajo  $\Gamma$  con sistema multiplicador  $\tilde{\mathcal{K}}$  si  $f$  satisface las siguientes condiciones:

i)  $f(\gamma w) = \tilde{\mathcal{K}}(\gamma)f(w)$ , con  $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbf{H}$ .

ii)  $f$  es una función característica de  $D_{L-B}$  (Def. 6).

iii)  $\exists c \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(z, v)| < \{v + (1 + |z|^2)v^{-1}\}^c, \forall (z, v) \in \mathbf{H}$ .

Def. 12.- Una forma automórfica  $f$  es una integral cuadrable si:

$$\int_{\mathcal{F}} |(z, v)|^2 \frac{dz dv}{v^3} < \infty$$

en que  $\mathcal{F}$  representa el dominio fundamental de  $\Gamma$ .

Nota 2.- La integral es independiente de la elección particular de  $\mathcal{F}$ , debido a que la medida  $\frac{dz dv}{v^3}$  es invariante, por  $SL(2, C)$ . El dominio fundamental de  $\Gamma$  es cualquier conjunto abierto  $\mathcal{F} \subset \mathbf{H}$  tal que  $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\mathcal{F}$  es una unión disjunta cuya clausura coincide con  $\mathbf{H}$ .

Def. 13.- Sea  $\mathcal{K}: \tilde{\Gamma}_{princ}^{(2)}(3) \rightarrow \mathbb{C}^*$  el homomorfismo extendido de Kubota [1] [6]. Sea  $\Gamma$  un subgrupo de índice finito en  $\tilde{\Gamma}_{princ}^{(2)}(3)$ . Sea  $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$  una forma metaplética cúbica bajo  $\Gamma$  si  $f$  posee automorfismo respecto de  $\Gamma$  con sistema multiplicador  $\mathcal{K}$ .

Def. 14.- Sea  $\mathcal{L}(q, r)$  el vector espacial de las formas metapléticas cúbicas  $f$  bajo  $\tilde{\Gamma}_{princ}^{(2)}(q)$  y que a su vez son las funciones propias o características del operador  $D_{L-B}$  cuyo valor propio o característico es  $\gamma = r(2 - r)$ .

Nota 3.-  $\mathcal{L}^2(q, r)$  representa al subespacio de formas integrables cuadradas en  $\mathcal{L}(q, r)$  equipado con el producto interno Petersson:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{F}} f_1(z, v) \overline{f_2(z, v)} \frac{dz dv}{v^3}$$

expresión con la propiedad de ser un Espacio de Hilbert dimensional finito [1] [7].

Def. 15.- Con base en  $f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\sigma \in SL(2, (\mathbb{Q}\sqrt{3}))$  se define ahora  $f_\sigma(w) = f(\sigma w)$ .

Nota 4.- Si  $f$  es una forma metaplética cúbica bajo  $\Gamma$ ,  $\sigma\Gamma\sigma^{-1} = \Gamma$  y  $\mathcal{K}(\sigma\gamma\sigma^{-1}) = \mathcal{K}\gamma \forall \gamma \in \Gamma$ , entonces se cumple que  $f_\sigma$  es una forma metaplética cúbica bajo  $\Gamma$ .

Nota 5.- Si  $f \in \mathcal{L}(q, r)$ , entonces  $f_\sigma \in \mathcal{L}(q', r)$  para algún ideal  $q'$ . También  $f_\sigma \in \mathcal{L}^2(q', r)$  si  $f \in \mathcal{L}^2(q', r)$ .

III. Formas Metapléticas Cúbicas sobre  $\mathbf{X} \cong \frac{SL(3, \mathbb{C})}{SU(3)}$ .

Def. 16.- Sea  $\mathbf{X} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}_+^{*2}$  un espacio  $\mathbf{X}$  tomando como referencia la mano derecha para observar el producto de las variedades analíticas reales. Se considera que  $w = (z_1, z_2, z_3, u, v) \in \mathbf{X}$  que justifica la descomposición factorial  $\gamma$  en  $SL(3, \mathbb{C})$  [1].

Def. 17.- Consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} n(w) &= n(z_1, z_2, z_3). \\ a(w) &= \text{diag}(u^{1/3} v^{2/3}, u^{1/3} v^{-1/3}, u^{-2/3} v^{-1/3}). \\ U(w) &= u, V(w) = v, Z_j(w) = z_j, \tilde{Q}(w) = (z_1, u), \\ Q(w) &= (z_3, v). \end{aligned}$$

Nota 6.-  $Q(w)$  y  $\tilde{Q}(w)$  representan puntos en el espacio hiperbólico  $\mathbf{H}$ .

Def. 18.- Sean las variedades de isomorfismo analíticas reales [1] [3]:

$$\mathbf{X} \rightarrow \frac{SL(3, \mathbb{C})}{SU(3)}, w \mapsto n(w)a(w)SU \quad (3).$$

Nota 6.- Lo anterior permite la transferencia sobre  $\mathbf{X}$  por la acción de traslaciones por la izquierda del grupo  $SL(3, \mathbb{C})$  sobre  $\frac{SL(3, \mathbb{C})}{SU(3)}$ .

Nota 7.-  $\gamma w$  representa la imagen del punto  $w \in \mathbf{X}$  bajo la acción de  $\gamma \in SL(3, \mathbb{C})$ . El espacio  $\mathbf{X}$ , al ser equipado con la métrica Riemanniana  $SL(3, \mathbb{C})$  -invariante, se transforma en un espacio simétrico globalmente Riemanniano tipo 4 (en la clasificación de Cartan). También es posible adjuntar a la métrica Riemanniana un operador diferencial de segundo orden (operador Laplace - Beltrami, Def. 6), considerado invariante, pues su acción sobre  $\mathbb{C}^\infty$  -funciones  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  conmutan con la acción  $SL(3, \mathbb{C})$  sobre  $\mathbf{X}$  determinado únicamente por esta condición.

Def. 19.- Sea  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  un álgebra de operadores diferenciales invariantes sobre  $\mathbf{X}$  generada por el operador Laplace -Beltrami y por el operador de tercer orden.  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  tiene la propiedad de ser un  $\mathbb{C}$  - álgebra isomórfica con respecto al álgebra de polinomios de 2 variables sobre  $\mathbb{C}$ .

Def. 20.- Sea  $i$  una involución, es decir un automorfismo de  $SL(2, \mathbb{C})$  por  $\gamma \mapsto {}^i\gamma = \sigma^t \gamma^{-1} \sigma^{-1}$ , donde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^i\gamma = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \quad \text{para cualquier}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Def. 21.- La involución  $i$  en  $SL(3, \mathbb{C})$  posee la involución de Cartan  $\gamma \mapsto {}^t\gamma^{-1}$ .

Proposición 2.- Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de  $SL(3, \mathbb{C})$ ; sea  $\tilde{\psi}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  un grupo homomórfico con valores en el círculo unitario (carácter unitario). Entonces  $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  es una expresión automorfa bajo  $\Gamma$  con sistema multiplicador  $\tilde{\psi}$  si  $F$  es una  $\mathbb{C}^\infty$ -función si satisface las siguientes condiciones:

- $F(w\gamma) = \tilde{\psi}(\gamma)F(w) \mid \gamma \in \Gamma, w \in \mathbf{X}$ .
- $F$  es una función propia de todos los operadores invariantes sobre  $\mathbf{X}$ .
- $\exists c \in \mathbb{R}$ , tal que  $|F(w)| < Norm(n(w)a(w))^c \forall w \in \mathbf{X}$ .

Nota 8.- Para el caso de la segunda condición, es necesario que:  $\forall D \in \mathbf{D}(\mathbf{X})$  se conserve la igualdad  $DF = \lambda_F(D) \in \mathbb{C}$ , con la consecuencia que el mapeo  $D \rightarrow \lambda_F(D)$  es una  $\mathbb{C}$  - álgebra homomórfica, como en el caso de que  $\lambda_F$  es una caracterización de  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ , en cuyo caso  $F$  es una función propia adjunta de  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  unida con  $\lambda_F$ . Y es justamente una noción muy general de formas automórficas cuando en esta segunda condición se sustituye la idea anterior:  $DF = 0 \forall D \in I_F$ , en que  $I_F$  representa un ideal de codimensión finita de  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ .

La última condición significa que  $Norm(\delta)$  para  $\delta \in S(3, \mathbb{C})$  es el trazo  $(\delta^t \delta)$  [1] [7].

Proposición 3.- Sea  $\psi = \overline{\mathcal{K}_3}: \tilde{\Gamma}_{princ}^{(3)}(3) \rightarrow \mathbb{C}^*$  un homomorfismo Bass-Milnor-Serre [1] [8]; sea  $\Gamma$  un subgrupo de índice finito en  $\tilde{\Gamma}_{princ}^{(3)}(3)$ . Entonces existe  $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  y es una forma metaplética cúbica en  $\Gamma$ , si  $F$  es un automorfismo también en  $\Gamma$  con un sistema multiplicador  $\psi$ .

Nota 9.- El isomorfismo de variedades analíticas  $(z_1, z_2, z_3) \mapsto n(z_1, z_2, z_3)$  hace que la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{C}^3$  sea ahora la medida de Haar sobre  $\mathbb{N}$ .

Proposición 4.- Sea  $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$  sea un automorfismo bajo  $\Gamma_q$  son sistema multiplicador  $\tilde{\psi}$ ; sea  $\Delta = \Gamma(q) \cap \mathbb{N}$ . Supongamos que  $\Delta$  está contenido en el núcleo del homomorfismo  $\tilde{\psi}$ . Al existir  $\mu, \nu \in q^*$  tenemos la siguiente expresión:

$$c_{\mu, \nu}(u, v; F) = c \int_{\mathcal{F}_q} \int_{\mathcal{F}_q} \int_{\mathcal{F}_q} F(w) \overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)} dz_1 dz_2 dz_3, \quad \text{con } w \text{ (por Def. 16)}.$$

Nota 10.- Debido a que  $\Delta$  está contenido tanto en los núcleos de  $\tilde{\psi}$  y del homomorfismo, la integral anterior es independiente de la elección particular de  $\mathcal{F}_q$ .

Proposición 5.- También es válida para las formas metapléticas cúbicas  $F$  los coeficientes de Fourier de la forma  $F: c_{\mu, \nu}(u, v; F)$  con  $\mu, \nu$  -ésimo coeficientes de Fourier.

Proposición 6.- Si  $F$  es un automorfismo bajo el grupo  $\Gamma(q)$  y  $\lambda \in SL(3, \mathbb{C})$  representa cualquier matriz que satisfice:

$$\lambda \Gamma(q) \lambda^{-1} = \Gamma(q); \quad \tilde{\psi}(\lambda \gamma \lambda^{-1}) = \tilde{\psi}(\gamma) \forall \gamma \in \Gamma(q),$$

entonces la función  $\mapsto F(\lambda w), w \in \mathbf{X}$  también es un automorfismo bajo el grupo  $\Gamma(q)$  con el mismo sistema multiplicador  $\tilde{\psi}$  de igual manera que  $F$ .

#### IV. CONCLUSIONES

He considerado la descripción anterior siguiendo un orden lógico en la semántica matemática establecida. Las primeras 10 definiciones justifican los antecedentes necesarios para abordar el objeto matemático estudiado. A partir de la definición número 11 y siguientes se aborda formalmente la existencia de las Formas Metapléticas Cúbicas y que en la tercera parte de este artículo se escribe formalmente, no sin dejar de mencionar, en las definiciones 16, 17, 18, 19, 20 y 21 otros objetos matemáticos necesarios. Estas formas dan sustento a otros objetos matemáticos como las formas metapléticas, la acción sobre las matrices triangulares superiores, la acción de  $p, \tilde{p}$ , los mapeos de  $\mathbb{Q}$  y  $\tilde{\mathbb{Q}}$ , las series de Einsestein, la expansión de Fourier de acuerdo con Piatetski-Shapiro y Shalika, los operadores diferenciales invariantes y las funciones de Whittaker [1]. Al ser un tema relativamente reciente, ofrece una amplia gama de oportunidades en la investigación de la matemática pura.

#### REFERENCIAS

- [1] Proskurin, N. (1998). Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions. Springer – Verlag. Berlin Heidelberg.
- [2] Bourbaki, N. (1968). Lie Groups and Lie Algebras. Chapter 4 – 6. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- [3] Iwasawa, K. On some type of topological groups. Annals of mathematics, Vol. 50. 507 – 558.
- [4] Beltrami, E. (1902). Teoria fondamentale degli spazzi di curvatura costante. Opere Matematiche. T. 1. Milano.
- [5] Poincaré, H. (1916). Mémoire sur les groupes kleinéens. Ouvres, T 2. Paris.
- [6] Kubota, T. (1965). Ein aritmetischer Satz uber ein Matrizengruppen. J. für die reine und angew. Math., Bandn222, 55 - 57. Versión electronic recuperada de : [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689\\_0222?tify={%22pages%22:\[591,%22panX%22:0.191,%22panY%22:0.782,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.326}](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0222?tify={%22pages%22:[591,%22panX%22:0.191,%22panY%22:0.782,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.326}) Viernes 4 de junio de 2021. 22:17.
- [7] Chandra, H. (1968). Automorphic Forms on Semi-simple Lie Groups. Springer-Verlag Notes in Math 62. Berlin Heidelberg.
- [8] Bass, H., Milnor, J., Serre, J. (1967). Solution of the congruence subgroup problem for  $SL_n$  ( $n \geq 3$ ) and  $Sp_{2n}$  ( $n \geq 2$ ). Math Publ. number 33: 59-137.

# Matrices: Una descripción general de sus operaciones y tipos.

Mateos Sánchez Areli Guadalupe.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

[areg.mats@aefcm.nuevaescueal.mx](mailto:areg.mats@aefcm.nuevaescueal.mx)

**Resumen-** El artículo brinda una pequeña introducción sobre que es una matriz, las operaciones que se pueden realizar con matrices y los diferentes tipos de matrices que se pueden tener, y como obtener matrices inversas o matrices identidad, procedimiento de multiplicación de matrices e inversa de una matriz junto con una transpuesta.

**Palabras Clave-** matrices, matrices inversas, matrices identidad, multiplicación matricial.

**Abstract-** The article gives a short introduction about what a matrix is, the operations that can be performed with matrix and the different types of matrices that can be had, how to obtain inverse matrix or identity matrix, the matrix multiplication procedure to obtain the inverse of a matrix with a transpose.

**Keywords-** matrix, inverse matrix, identity matrix, matrix multiplication.

**Mathematical Subject Classification:** 00A35.

## I. INTRODUCCIÓN

Una matriz es un arreglo rectangular de  $mn$  número [1]. Las matrices se nombran con letras mayúsculas y sus elementos se encierran entre paréntesis o corchetes.

Decimos que la matriz es de orden  $m \times n$ , cuando tiene  $m$  filas y  $n$  columnas donde el elemento  $a_{ij}$  denota que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz de  $m \times n$  con  $m=n$  es una matriz cuadrada, es decir tiene el mismo número de renglones que de columnas. Una matriz cero es aquellas que todos sus elementos tienen un valor cero.

## II. MATRIZ

**Definición 1:** Igualdad de matrices

Dos matrices  $A=(a_{ij})$  y  $B=(b_{ij})$  son iguales si son del mismo tamaño y los componentes correspondientes son iguales como define Ayres [2].

**Definición 2:** Suma de matrices.

Sea  $A=(a_{ij})$  y  $B=(b_{ij})$  dos matrices de  $m \times n$ . Entonces la suma de  $A$  y  $B$  es la matriz  $m \times n$   $A+B$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Es decir;  $A+B$  es la matriz  $m \times n$  que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de  $A$  y  $B$ .

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del único tamaño.

**Definición 3:** Matriz por un escalar.

Sea  $A=(a_{ij})$  es una matriz de  $m \times n$  y si  $\alpha$  es un escalar, entonces la matriz  $m \times n$ ,  $\alpha A$  esta dada por:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$$

Esto es  $\alpha A = \alpha a_{ij}$  es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de  $A$  por  $\alpha$  [1].

**Teorema 1:** Propiedades de las matrices.

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres matrices de  $m \times n$  y sean  $\alpha$  y  $\beta$  son dos escalares.

Entonces:

- i.  $A+0=A$
- ii.  $0A=0$
- iii.  $A+B=B+A$  (ley conmutativa para suma de matrices)
- iv.  $(A+B)+C=A+(B+C)$  (ley asociativa para suma de matrices)
- v.  $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$  (ley distributiva para multiplicación por un escalar)
- vi.  $1A=A$
- vii.  $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$  [1]

**Definición 4:** Producto de matrices.

Sea  $A=(a_{ij})$  es una matriz de  $m \times n$  y sea  $B=(b_{ij})$  una matriz de  $n \times p$ . Entonces el producto de  $A$  y  $B$  es una matriz de  $m \times p$ ,  $C=(c_{ij})$ , en donde:

$$c_{ij} = (\text{ renglo } i \text{ de } A) \cdot (\text{ columna } j \text{ de } B)$$

El elemento  $ij$  de  $AB$  el producto del renglón  $i$  de  $A$  y la columna  $j$  de  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{jn}$$

Si el número de columnas de  $A$  es igual al número de renglones de  $B$  entonces se dice que  $A$  y  $B$  son **compatibles** para la **multiplicación**. De lo contrario se dirá que son **incompatibles** [2].

Definición 5: Matriz Identidad

La matriz identidad  $I_n$  de  $n \times n$  es una matriz cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a  $1$  y todos los demás son ceros.

Se identifica la matriz identidad como  $I$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2:

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  entonces

$$AI_n = I_nA = A$$

$I_n$  conmuta con toda matriz de  $n \times n$  y no la modifica después de la multiplicación.

Definición 6: Inversa de una matriz.

Sea  $A$  y  $B$  dos matrices de  $n \times n$ , supongamos que  $AB=BA=I$ .

Entonces  $B$  se llama la inversa de  $A$  denotándose como  $A^{-1}$ .

Se tiene  $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ . Si  $A$  tiene inversa, entonces  $A$  es invertible.

Una matriz que no es invertible se llama **singular** y si es invertible se llama **no singular**[3].

Teorema 3:

Si una matriz  $A$  es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración.

Supongamos que  $B$  y  $C$  son inversas, se puede demostrar que  $B=C$ .

Por definición tenemos que  $AB=BA=I$  y  $AC=CA=I$ . Usando la ley asociativa de matrices:

$$B(AC) = (BA)C \text{ entonces}$$

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$$

Entonces  $B=C$  y el teorema está demostrado[4].

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada  $A$ .

*Paso 1:* Se escribe la matriz aumentada  $(A/I)$

*Paso 2:* Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz  $A$  a su forma escalonada reducida por renglones

*Paso 3:*  $A$  es inversa si la forma escalonada reducida por renglones de  $A$  es la matriz identidad  $I$ , entonces  $A^{-1}$  es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical [4].

Definición 7: Transpuesta de una matriz:

Sea  $B$  es una matriz de  $m \times n$ , la transpuesta de  $B$  se escribe como  $B^t$  es la matriz de  $n \times m$  que se obtiene al intercambiar renglones por columnas de  $B$ .

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \text{ entonces } B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Definición 8: Matriz Simétrica.

La matriz  $A$  de  $n \times n$  se denomina simétrica si  $A=A^t$ , es decir las columnas de  $A$  son también los renglones de  $A$ [5].

### III. CONCLUSIONES

Las matrices se utilizan en diferentes áreas para presentaciones de datos como un problema de doble entrada, análisis de costos de proyectos arquitectónicos, optimización lineal, producción de algún producto anual, mensual o semanal en cualquier fábrica, etc.

Hoy en día existen diversos softwares que nos permiten la realización de operaciones con matrices de una manera más rápida, sencilla y sin el temor de obtener alguna falla por ejemplo *maple*, *Matlab* o *Mathematica*.

### REFERENCIAS

- [1] Grossman, S. Algebra Lineal. Mc Graw Hill. (Madrid, 2007).
- [2] Ayres Frank, Jr. Teoría y Problemas de Matrices. Mc Graw Hill, (Madrid, 1962).
- [3] Lizarriturri y Olague, Gerardo. Matrices y algebra matricial. UNAM FES ACATLAN. p. 35 (México, 2000).
- [4] Barnett, Z. B. Álgebra. McGraw Hill. p.488-500 (Madrid, 2000).
- [5] Lang, S. Introducción al Álgebra lineal. Addison-Wesley Iberoamericana. p. 41-61 (México, 1998).

# Propuesta de modelos matemáticos para economía, educación y salud: Enfoque global.

Fernando Gustavo Isa Massa.

Universidad tecnológica nacional – Facultad regional Tucumán  
Moreno 935 – San Miguel de Tucumán - Tucumán, Argentina  
[ferim74@yahoo.com.ar](mailto:ferim74@yahoo.com.ar)

**Resumen-** La gran tragedia de la humanidad es cuando perdemos la empatía, y seguido de ello, la solidaridad hacia nuestros semejantes y las crisis antes de ser oportunidades se convierten en problemas sin solución, es la labor del científico y la del matemático iluminar, entonces y más ahora, debemos llenar de luz la oscuridad de una humanidad que se cae por su debilidad y carencia de virtudes, por eso dediqué gran parte de este año para desarrollar 3 modelos matemáticos originales que sirven, entre otros, para educación, salud y economía, analizo desde aprender hasta la pandemia y caída del PBI, son innumerables las aplicaciones, aquí desarrollo algunas, en educación: aprendizaje por razonamiento, homogeneidad del aprendizaje y desventajas del aprendizaje por virtualidad, en salud: consecuencias en negarse a vacunar, homogeneidad en edad de paciente COVID 19 y causas del cáncer y finalmente en economía: falta de financiación a pymes, homogeneidad en PBI per cápita y caída de PBI.

**Palabras Clave-** economía, educación, modelos matemáticos originales, salud.

**Abstract-** The great tragedy of humanity is when we lose empathy, and followed by it, solidarity with our fellow men and crises before becoming opportunities become problems without solutions, It is the work of the scientist and the mathematician to illuminate, then and more now, we must fill with light the darkness of a humanity that falls due to its weakness and lack of virtues, that is why I dedicated a large part of this year to develop 3 original mathematical models that serve, among others, for education, health and economics, I analyze everything from learning to the pandemic and the drop in GDP, there are countless applications, here I develop some, in education: learning by reasoning, homogeneity of learning and disadvantages of learning by virtuality. In health: consequences of refusing to vaccinate, homogeneity in age of the COVID 19 patient and cancer and its causes and finally in economics: lack of financing for SMEs, homogeneity in GDP per capita and a drop in GDP.

**Keywords-** economy, education, original mathematical model, health.

**Mathematical Subject Classification:** 90-10.

## I. INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos que presento tienen muchas aplicaciones en la práctica y son viables a problemas muy importantes como ser la economía, salud, educación, tecnología, medio ambiente y seguridad ciudadana entre otros.

La razón por la cual elegí estos temas es que son el problema actual a resolver. Cada una de estas soluciones

está demostrada en modelos matemáticos en disciplinas como: teoría de colas, probabilidad y estadísticas circular. Los presento en teoremas que son demostrados y evaluados en la práctica. Los desafíos que el mundo moderno nos presenta como problemas no son más que pruebas de nuestra función de especie evolucionada para brindar soluciones a problemas de distinta índole. Para ello indague en las matemáticas para brindar una forma estocástica de resolver los problemas y encontrar la verdad.

Estos métodos matemáticos estocásticos están bien probados y la aplicación a otras ramas de la ciencia queda a libre disposición científica y, por la cantidad de aplicaciones, será evaluada en otros papers científicos.

## II. MATERIAL Y MÉTODOS

Uso tres modelos originales en probabilidades, específicamente en teoría de colas, probabilidad clásica y estadística circular. Las pruebas siguen un método científico de propuesta en teoremas, que luego demuestro en forma empírica de formas diferentes, y de acuerdo al modelo y su relación con la disciplina matemática de fuente. Tomo datos de estadísticas e información confiable, para poder lograr el máximo entendimiento y análisis. El proceso de abstracción es importante para la comprensión, aunque muchas de las explicaciones que se hacen son de uso común, dándole al artículo un enfoque globalizador y general.

### Teorema 1

Si  $\rho$  es el factor de tráfico [1], [2] y denota para el problema la ejecución exitosa entonces la probabilidad de fracaso con ese factor es  $P_f = 1 - \rho^n$

### Prueba:

Sea  $\rho$  el factor de tráfico como variable que incluye el uso correcto del sistema, entonces podemos pensar lo siguiente:

$$\rho \wedge \rho \wedge \rho \dots \wedge \rho = \rho^n$$

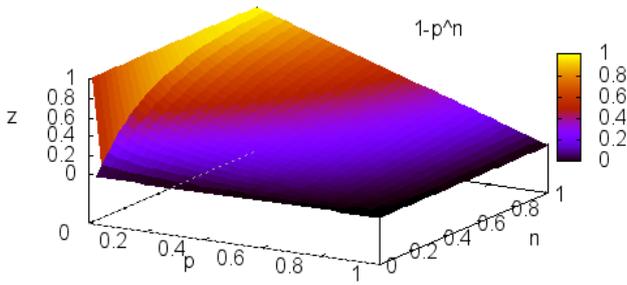


Fig. 1 Probabilidad de fracaso

El saber que  $p$  se hace una y otra vez por ser el problema resuelto  $n$  veces. Pero si queremos saber la probabilidad de fracaso debemos hacer lo siguiente con su complemento:

$$P_f = 1 - p^n \quad (1)$$

Y toma la forma de la inversa de la probabilidad de éxito en la binomial negativa y Poisson.  
Notación Kendall-Lee

$$(M/M/1): (FIFO/\infty/\infty)$$

Ver fig. 1

Analizar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ P_f &= 1 - 0^n = 1 \end{aligned}$$

Un factor de éxito pequeño alienta una probabilidad de alta

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \\ P_f &= 1 - 1^n = 0 \end{aligned}$$

Un factor de éxito alto provoca probabilidad baja  
 $n = 0$

$$P_f = 1 - p^0 = 0$$

Pocos intentos de éxito generan probabilidad de fracaso baja  
 $n = 1$

$$P_f = 1 - p^1 = 1 - p$$

Que es en teoría de colas la probabilidad de llegar primero y ser atendido. Entonces es la mayor probabilidad desde análisis de  $n$ .

$$0 \leq P_f \leq 1$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq n \leq 1$$

También puede ser:

$$0 \leq n < +\infty$$

Teorema 2

Si  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  es una función trigonométrica conocida, entonces:

$$P_t = \frac{\frac{\cos(90 - \alpha_1 p_1)}{\sin \alpha_1} + \dots + \frac{\cos(90 - \alpha_n p_n)}{\sin \alpha_n}}{n} \quad (2)$$

una función de probabilidad descrita en términos trigonométricos en estadística en su representación circular entre  $0$  y  $90^\circ$ .

Prueba:

$$\begin{aligned} \text{Para } p_i = 0 \rightarrow P_t &= 0 \\ P_t &= \frac{\frac{\cos(90 - \alpha_1 * 0)}{\sin \alpha_1} + \dots + \frac{\cos(90 - \alpha_n * 0)}{\sin \alpha_n}}{n} \\ P_t &= \frac{\frac{\cos(90)}{\sin \alpha_1} + \dots + \frac{\cos(90)}{\sin \alpha_n}}{n} = \frac{0}{n} = 0 \end{aligned}$$

Si  $p_i \rightarrow 1$  entonces, y además  $\alpha_i \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\frac{\cos(90 - 0 * 1)}{\sin 0} + \dots + \frac{\cos(90 - 0 * 1)}{\sin 0}}{n} \\ P_t &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Que es una indeterminación. Aplico L'Hopital y derivo numerador y denominador

$$= \frac{-\sin \alpha_i}{\cos \alpha_i} = \frac{-\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = \frac{0}{n} = 0$$

$P_t \rightarrow 0$

Si  $p_i \rightarrow 1$  entonces, y además  $\alpha_i \rightarrow 90$

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\frac{\cos(90 - 90 * 1)}{\sin 90} + \dots + \frac{\cos(90 - 90 * 1)}{\sin 90}}{n} \\ P_t &= \frac{\frac{\cos 0}{\sin 90} = \frac{1}{1} = \frac{1}{n}}{n} \end{aligned}$$

$$P_t \rightarrow \frac{1}{n}$$

$$0 \leq P_t \leq 1$$

$$0 \leq p \leq 1$$

$$0 \leq \alpha \leq 90$$

$$0 \leq n < +\infty$$

Teorema 3:

Si  $\sin \alpha$  es una función trigonométrica y se quiere sacar lo parejo u homogéneo de una serie de datos, ordenada de mayor a menor entonces:

$$P_p = \frac{P}{n} = \frac{(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_n)}{(x_n - x_1)} + \frac{(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_{n-1})}{(x_{n-1} - x_2)} + \dots + \frac{(\sin \alpha_{k-1} + \sin \alpha_k)}{(x_k - x_{k-1})} \quad (3)$$

Prueba:

Si  $(x_i - x_k) \geq 2$  para todo  $i, k$   
Entonces  $(\sin \alpha_k + \sin \alpha_i) \leq 2$  para todo  $i, k$   
Por lo tanto

$$0 \leq P_p \leq 1$$

$$0 \leq x < +\infty$$

$$0 \leq \alpha \leq 90$$

$$0 \leq n < +\infty$$

Convierto  $x$  en  $\alpha$  en regla de tres simple  
Problemas a resolver.

### III. ECONOMÍA

Por razones históricas las matemáticas siempre fueron funcionales a problemas concretos, tal es así, que las ciencias económicas fueron beneficiadas con complejos planteamientos para mejorar las condiciones económicas y formar sistemas de distribución de riquezas. Ese es el objetivo de la investigación en economía, parto de cómo mejorar la participación de las pymes o pequeñas y medianas empresas en el sistema financiero, ya que estas absorben entre el 70% y 80% del capital de trabajo mundial y motorizan la economía. Sigo con el modelo de distribución de riquezas para saber si la riqueza está distribuida o existe concentración. Para terminar con las razones de la caída del PBI y saber cómo evitarlas. El estudio lo hago para Argentina, con preferencias en el 2018, ya que los registros en pandemia estarían sesgados por la actuación de la enfermedad en el ciclo económico, en la paralización de la economía por el confinamiento y baja de la producción. Pymes.

Porcentaje de empresas con dificultades en acceder al crédito o financiamiento: 62% [3].

Históricamente el 40% de las empresas acceden al crédito bancario regularmente.

Caída de créditos a pymes en términos reales: 21%.

De (1) sabemos:

$$P_f = 1 - \rho^n$$

$$P_f = 1 - 0.62^{0.4}$$

$$P_f = 0.17$$

$$0.17 \approx 0.21$$

Por lo tanto la predicción de caída de financiamiento de las pymes en Argentina tiene una proyección del 0.17 de probabilidad; muy similar a los 0.21 de caída real.

Ahora en un análisis del sueldo promedio en Argentina de los distintos núcleos o estratos sociales veremos cuál es la probabilidad de la homogeneidad o emparejamiento del mismo y si esto es posible en un contexto de concentración de riquezas.

Sueldos según estrato social [3]

Bajo \$ 12000 = 200 dólares = 12 simplifico los ceros

Medio \$ 31000 = 517 dólares = 31

Alto \$ 80000 = 1333 dólares = 80

Por (3) sabemos:

(12, 10°), (31, 27°), (80, 72°) Transformo a grados con referencia de 100 como máximo en una regla de tres

$$P = \frac{(\sin 72^\circ + \sin 10^\circ)}{(80-12)} + \frac{(\sin 72^\circ + \sin 27^\circ)}{(80-31)} + \frac{(\sin 27^\circ + \sin 10^\circ)}{(31-12)} =$$

$$P = 0.0781$$

$$P_p = P / 3$$

$$P_p = 0.026$$

Concluimos la existencia de una gran concentración de riquezas en Argentina, fenómeno que sería global y uno de los grandes desafíos modernos será nivelar los ingresos de los estratos sociales. Para con ello terminar con la pobreza y desigualdad.

Para terminar con el desarrollo de la investigación en economía del 2018 en Argentina, partamos de una hipótesis: la caída del producto bruto interno (pbi), se debe a[3]:

- 1- Inflación
- 2- Deuda pública
- 3- Caída inversión

Esta hipótesis será aceptada para valores altos de probabilidad.

Inflación: 47,6% = 42.84°

Deuda pública: 77,4% = 69.66°

Caída inversión: 25% = 22.5°

Por (3) sabemos:

$$\frac{\cos(90 - 0.476 * 42.84^\circ)}{\sin 42.84^\circ} + \frac{\cos(90 - 0.774 * 69.66^\circ)}{\sin 69.66^\circ}$$

$$+ \frac{\cos(90 - 0.25 * 22.5^\circ)}{\sin 22.5^\circ}$$

$$= \frac{\quad}{3}$$

$$P_t = 0.5433$$

Por lo tanto se demuestra la hipótesis sobre los factores o causas de la caída del producto bruto interno y su probabilidad es de 0.5433

### IV. SALUD.

Actualmente en el desarrollo de una pandemia, cabría buscar formas de mejorar la situación sanitaria y controlar las internaciones y decesos por dicha enfermedad. El objetivo es brindar de herramientas matemáticas para ello, sin perder de foco los datos estadísticos, que pueden variar de país en país, por lo tanto sugiero que los estudios tengan en cuenta los datos locales. La investigación empieza en un análisis de como la falta de vacunación tiene pocos decesos y ante la postura de los que no se quiere vacunar, les muestra un marco analítico de lo potencialmente peligroso que es esa postura. Sigue con las edades de vacunación y cuáles de ellas sugieren un índice elevado de peligro y la homogeneidad. Al final planteo una investigación de las principales causas de muerte por cáncer y planteo como variables las causas dejando por último un estudio de causas no enunciadas para cálculo de su incidencia.

Vacunados con primera o segunda dosis con COVID 19 positivo: 0.2 [4].

Días de evaluación: 65

Por (1)

$$P_f = 1 - 0.2^{0.23}$$

$$P_f = 0.309$$

Donde 0.23 es en porcentaje de 14 días entre 65 de total.

La probabilidad es un formato de abstracción de la importancia de vacunarse. La probabilidad de fracaso tomando como índices los 0.2 de factor de contagio al tener una o dos dosis y 0.23 el porcentaje de evaluación de 14 días.

Nos preguntemos que pasa si aumentamos los días. Para el próximo ejemplo tomo 21 días que son 32.3%

$$P_f = 1 - 0.2^{0.323}$$

$$P_f = 0.405$$

$$X=44^\circ$$

La probabilidad aumenta a medida que pasan los días después de las dosis contra el COVID 19. Algo que desalienta las teorías de los que no confían en ellas por distintas razones. La vacunación con esto estaría demostrada como la mejor forma, con los cuidados y recomendaciones, de combatir el virus.

Edades de riesgo COVID 19 [4]

15 a 40 años = 11.5%

40 a 60 años = 44.8%

Mayores 60 = 43.8%

Sobre una base de  $90^\circ$  como cota

11.5% =  $10.35^\circ$

40.8% =  $40.32^\circ$

43.8% =  $39.42^\circ$

(0.115,  $10.35^\circ$ ), (0.408,  $40.32^\circ$ ), (0.438,  $39.42^\circ$ )

Por (3)

$$P = \frac{(\sin 40.32^\circ + \sin 10.35^\circ)}{(44.8-11.5)} + \frac{(\sin 39.42^\circ + \sin 40.32^\circ)}{(44.8-43.8)} + \frac{(\sin 10.35^\circ + \sin 39.42^\circ)}{(43.8-11.5)}$$

$$P_p = 1.035 / 3$$

$$P_p = 0.345$$

Si bien no es una probabilidad alta, queda para análisis el hecho de saber que hay una predisposición a que la probabilidad de parejos se acreciente, ya que no existe un estudio empírico que demuestre que hay una gran diferencia en las edades de mortalidad de COVID 19. Lo que sabemos, es que esa franja se comporta en forma aleatoria, y a mayor edad es más propenso a la mortalidad del virus. Los nuevos indicadores nos remiten a datos que la edad promedio de internación bajó, por lo tanto la probabilidad de 0.345 es apta para deducir un moderado emparejamiento de los datos.

El estudio del cáncer nació con la intención de dejar un método matemático para análisis factores que llevan a la enfermedad. En él puede incluirse como variable de decisión los factores cuyo comportamiento no se conoce, pero que tienen una relativa importancia en el desencadenamiento de la enfermedad. Con esto el investigador podrá saber la probabilidad de otros factores, que la bibliografía no incluye y como método de investigación generara una base de conocimiento en salud, tanto la salud preventiva para causas no genéticas del cáncer. También se podrá, con un mínimo de error, tener satisfactoriamente información para tratamiento.

Para estos datos de incidencia en la enfermedad [5]

Tabaco = 22% en grados sobre  $90^\circ$  de base =  $19.8^\circ$

Hepatitis B y C = 20% en grados sobre  $90^\circ$  de base =  $18^\circ$

Total de muertes por cáncer = 30%

Por (3)

$$0.30 = \frac{\frac{\cos(90-0.22*19.8^\circ)}{\sin 19.8^\circ} + \frac{\cos(90-0.2*18^\circ)}{\sin 18^\circ} + \frac{\cos(90-p*x^\circ)}{\sin x^\circ}}{3}$$

$$0.3 = (0.224 + 0.203 + \frac{\cos(90-p*x^\circ)}{\sin x^\circ}) / 3$$

$$0.9 - 0.427 = \frac{\cos(90-p*x^\circ)}{\sin x^\circ}$$

$$0.473 = \frac{\cos(90-p*x^\circ)}{\sin x^\circ}$$

$$P=0.44$$

La conclusión que llegamos es que con una probabilidad de 0.44 se engloban los otros factores que llevan a un 30% de mortalidad del cáncer. Un punto a considerar es que cuando más grande es esa probabilidad, pueden ocurrir dos cosas; que nos encontremos con un factor muy importante de causalidad de cáncer o que estamos ante la probabilidad de varios factores. Esto queda a interpretación del investigador y es fuente de la transformación de los modelos matemáticos en conocimiento fáctico.

## V. EDUCACIÓN

La educación es el pilar de la civilización moderna y el equilibrio de crecimiento de los pueblos, no podemos concebir una sociedad sin la inclusión de la educación en todos los niveles y de calidad, abogando por un estado de pensamiento libre. La educación es la clave del crecimiento y desarrollo de las naciones, con ella la sociedad encuentra una fuente de inspiración para sus decisiones y conductas. Tome para la investigación los siguientes tópicos: educación de matemáticas son la técnica de razonamiento versus la memorización, emparejamiento de las notas de alumnos de escuelas técnicas y por último educación en virtualidad y sus consecuencias.

Razonamiento versus memorización en la educación matemática

Total de alumnos tomados para la investigación = 14 alumnos

Usan el razonamiento de ese total = 3 alumnos. Porcentaje sobre total 21.42%

Aprobados de los 3 alumnos = los 3 aprobaron

Por (1), sabemos

$$P_f = 1 - 0.2142^{0.2142}$$

$$P_f = 0.2811$$

Esta probabilidad baja me da la impresión analítica que los 3 alumnos que usan el razonamiento para el aprendizaje tienen pocas probabilidades para el fracaso, siendo esta forma de estudio la indicada para las ciencias duras. Tomo como dato de  $\rho$  a la tasa de aprendizaje por razonamiento. La  $n$  es la misma tasa de aprendizaje por razonamiento, condición inicial para conjeturar y luego demostrar que los intentos de esos 3 alumnos están relacionados un 100% con su método. Por eso al considerar los intentos como 3 es saber que estos alumnos aprobaron la materia en todo el año. La  $n$  es la cantidad de intentos 3 sobre un total de éxitos: 3 aprobados.

Notas y su probabilidad de parejos

Tabla 1. Notas, su cantidad y transformada a grados

Nota	10	9	8	7	5	3
Grados	90	81	72	63	45	27
Cantidad	3	3	4	5	1	1

$$P = \frac{(3*\sin 90^\circ + \sin 27^\circ)}{(10-3)} + \frac{(3*\sin 81^\circ + \sin 45^\circ)}{(9-5)} + \frac{(4*\sin 72^\circ + 5*\sin 27^\circ)}{(8-3)}$$

$$P = 0.529 + 0.9175 + 0.8635$$

$$P_p = (2.31) / 3$$

$$P_p = 0.77$$

La presente investigación no contiene la calificación de 7 (siete), por ser muy alto el valor y no generarse probabilidades con cualquiera de las otras notas. La probabilidad que se genera de 0.77 me dice que los alumnos aprenden en forma pareja y es fácil de ver por Tabla 1. Aprender de forma pareja nos posibilita una interrelación sistémica que aumenta el grado de calidad educativa y cada uno de los alumnos potencia al resto en forma de un sistema equilibrado.

Alumnos y su aprendizaje en la virtualidad por pandemia.

Tabla 2. Aprendizaje en virtualidad

Alumnos	%	Virtuales	Materia	Docente
9	0.44	4	Economía	M. Garay
11	0.45	5	Moral	M. Garay
8	0.375	3	Ética	M. Garay
35	0.8571	30	Inglés	S. Saiquita
30	0.5	15	Taller mecánico	A. Saiquita

$$\frac{\cos(90 - 0.44 * 40^\circ)}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos(90 - 0.45 * 40^\circ)}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos(90 - 0.375 * 33.75^\circ)}{\sin 33.75^\circ} + \frac{\cos(90 - 0.8571 * 77.14^\circ)}{\sin 77.14^\circ} + \frac{\cos(90 - 0.5 * 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$$

$$P_t = 2.8243 / 5$$

$$P_t = 0.56486$$

Este resultado de 0.56486 de probabilidad concluye con la hipótesis de la virtualidad, dejando en claro, que está solo a la mitad de los alumnos dejan los conceptos y enseñanzas de calidad. Es sabido, que la situación económica de la familia incide en la educación (aunque no es determinante); entonces la capacidad de tener internet como conexión a la virtualidad, condiciona el sistema educativo en pandemia. Indagar sobre una educación de calidad, nos pone ante la iniciativa, de una mejor situación económica y social en las familias. Quedando eso solucionado, el sistema académico queda con menos carga y por ende es más eficiente. Una situación como la que viven los países emergentes nos lleva a los científicos y matemáticos buscar soluciones por afuera de la política, ya que la tarea quedaría sesgada; al considerar a la política como única fuente de soluciones a los problemas sociales.

## VI. CONCLUSIONES.

Los desafíos de los tiempos modernos nos llevan a los científicos y matemáticos a la búsqueda de soluciones para el mejor funcionamiento y ecuanimidad de las sociedades. Este es el mundo que vivimos y como parte de ello, es una responsabilidad de los que tienen poder generar soluciones a los conflictos sociales y el conocimiento es poder. Partí de la prueba de modelos originales y los apliqué a disciplinas sensibles y de rápida solución como lo son: economía, educación y salud. Quisiera dejar en claro que la elección de estos modelos se debió a su capacidad de demostrar viejas conjeturas de la economía, como lo son el fortalecimiento de las pequeñas y medianas empresas, aunque como sabemos no es solo este el problema a resolver; por lo tanto también

indagué en otros conceptos igual de importantes. La aplicación en salud, y más específicamente en virus y cáncer, se debió a la situación conflictiva de pandemia (para virus) y cáncer al ser una de las causas de muerte más grandes a nivel global. En educación que suele ser la disciplina que es ajuste y no, como debería ser, la variable que muestra el nivel de desarrollo y crecimiento de los países, y la mejor forma de salir de la pobreza. La educación genera libertad en cada país, y no solo en la forma de pensar, sino también de elegir y actuar. Por eso la elección de estos tres ítems, aunque debo aclarar, que también tienen aplicaciones en; medio ambiente, tecnología y seguridad ciudadana. El encontrar matemáticas puras, también es tarea del matemático para iluminar, pero las aplicaciones al ámbito social son una necesidad y requisito fundamental para el crecimiento de los países emergentes.

## VII. AGRADECIMIENTOS.

Al ing. Gustavo Carrasco, prof. Daniel Figueroa, prof. María Leonor Gómez, ing. Fany Herrera, prof. María Garay, prof. Atilio Saiquita, prof. Silvia Saiquita, prof. José Saravia. A Marcos Fajardo, a los editores y demás que trabajan en la revista muchas gracias

## REFERENCIAS

- [1] Taha. Investigación de operaciones. Pearson educación. (2004)
- [2] Mathur. Investigación de operaciones y el arte de la toma de decisiones. Prentice Hall. (1996)
- [3] <http://indec.gob.ar/> Accedido lunes 7 junio 2021 .
- [4] <http://secardiologia.es/blog> Accedido domingo 6 junio 2021.
- [5] <http://who.int/cancer/about/> Accedido sábado 5 junio 2021.

# Sistema de conteo y reconocimiento de objetos con RNAs.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.  
fajardoensm@gmail.com

**Resumen-** Se describen los principios del reconocimiento de patrones, técnicas de desarrollo, algoritmos, simulación y programación de un sistema que reconoce y cuenta objetos en MATLAB.

**Palabras Clave-** reconocimiento de patrones, visión artificial, I.A., RNAs.

**Abstract-** The document describes the principle of pattern recognition, development techniques, algorithms, modeling, simulation and programming a system can recognize and count objects in MATLAB.

**Keywords-** pattern recognition, artificial vision, A.I., ANNs.

**Mathematical Subject Classification:** 68T10.

digitales), generación de infracciones por placas de automóvil, identificación biométrica de rostros, iris y huellas digitales para seguridad.

Las aplicaciones de reconocimiento de patrones requieren de la emulación de los ópticos humanos mediante una o varias cámaras recurriendo por lo general a pre-procesamientos y conversiones del mundo tridimensional a bidimensional para poder aplicar un algoritmo de procesamiento de imágenes, reducción de datos y características, extracción, segmentación, reconocimiento de objetos y los pro-post-procesamientos de comprensión de datos y optimización, siendo inherentes de la visión máquina como la comprensión/ deducción automática de su estructura y propiedades de un mundo tridimensional, posiblemente dinámico o de una o varias imágenes bidimensionales de ese mundo[2].

Por otro lado en la parte cognitiva se recurren a algoritmos de abstracción de datos desde píxeles comunes, características locales, estructura, objeto, características de escena o cluster de objetos.

## I. INTRODUCCIÓN

El ser humano es una máquina biológica capaz de reconocer mediante sus sensores ópticos formas, colores y características independientemente del tamaño percibido ya sea en la realidad o virtualizado por algún dispositivo.

Algunos animales cuentan con el sentido de la vista mediante dos órganos ópticos especializados llamados “ojos” que les permiten sentir la luz, su absorción por cuerpos y el reflejo de la misma, pudiendo adquirir datos que al ser procesados por su cerebro en información crea lo que en ciencias cognitivas e inteligencia artificial denominamos la representación del modelo del mundo; dicha información les permite sobrevivir a ambientes y realizar actividades complejas como la navegación, identificación de alimento, depredadores y miembros similares.

Cualquier representación gráfica humana como los caracteres, alfabetos, iconos e ideas abstractas como la agrupación, división, teoría de conjuntos y geometría tienen un principio concreto que proviene de la experiencia percibida por el sentido de la vista de objetos reales.

Un patrón es la representación de un objeto por una entidad en su propio tipo de procesamiento[1].

El reconocimiento de los objetos bajo la representación de una entidad en patrones le permite a un organismo biológico o artificial lograr otros procesos con representaciones de los datos adquiridos como el cómputo, ordenamiento, descripción y clasificación.

La disciplina científica con mayor aplicación de la Inteligencia Artificial actualmente es el reconocimiento de patrones ópticos mediante metodologías de descripción y clasificación de objetos que emulen a los humanos.

El reconocimiento de patrones ópticos permite el uso de tecnologías comunes como lecturas de QR y barras, OCR (reconocimiento óptico de caracteres impresos a

## II. RECONOCIMIENTO DE PATRONES

El principio de reconocimiento de patrones parte del concepto de la medición[3]; es decir la comparación de un objeto con un patrón, la diferencia entre ambos es la similaridad y en un universo dinámico y la complejidad de detalles o granularidad en la descripción del patrón obliga en la humildad del método científico a indicar que cualquier conjetura humana o artificial en la disciplina del reconocimiento de patrones debe ser indicada a nivel probabilístico.

Más aún a nivel cuántico la materia se encuentra en un continuo intercambio de partículas que genera mayor incertidumbre en donde termina y comienza un objeto, en cuántas partes se encuentra, la usencia de la bidimensionalidad y más aún la superposición o su comportamiento como onda o partícula.

Mediante las técnicas de discriminación Bayesiana y ventana frontera de Parzen[4] es posible realizar un reconocimiento probabilístico respecto a características de un patrón; sin embargo han tenido buen resultado el uso de Redes Neuronales Artificiales (RNAs) no paramétricas con alguna prealimentación, las cuales pueden ser entrenadas y son susceptibles a aplicaciones de minería de datos y otras técnicas como la lógica difusa.

Para realizar el reconocimiento de objetos como se ha descrito anteriormente se requiere de un algoritmo que realice un tratamiento de la imagen tridimensional a bidimensional para poder ser procesada mediante un primer módulo de pre-procesamiento en donde obtenidos los datos del sistema óptico se eliminan ruidos de la imagen como brillo, color, saturación y otros que mejoran la calidad de la imagen, transformación a escala de grises o blanco y negro, algunos filtros como el blue-mare y algoritmos propios permiten una calidad que brinda características propias del patrón a localizar y otras como la detección de límites con algoritmos probabilísticos basados en el la aguja de Georges Louis Leclerc "Conde de Buffon" como la transformada de Hough y sus aplicaciones en sistemas de navegación [5].

La segunda fase es el filtrado de los datos mediante algoritmos de compresión y de extracción de características reduciendo las innecesarias.

Posteriormente la imagen es segmentada obteniendo la segregación de texturas, el reconocimiento de colores[6] y agrupamiento de características.

El módulo principal de reconocimiento de un objeto almacenado consiste en la medición mediante la comparación del objeto con respecto al patrón y el reconocimiento mediante la detección de las características descritas en el patrón.

Un Post-procesamiento opcional consiste en un análisis de escenas, modelos del mundo y conjuntos de objetos distintos para lograr funciones cognitivas avanzadas.

El algoritmo anterior se describe en la figura 1.

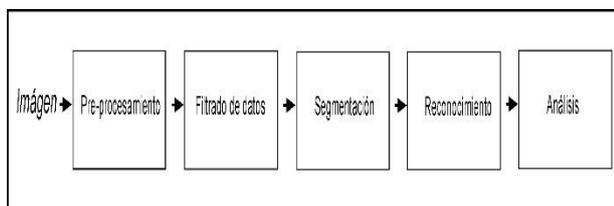


Fig. 1 Algoritmo general de reconocimiento de patrones.

Algunos algoritmos que utilizan las RNAS en la extracción de las características interesantes a comparar en un patrón y la segmentación que da origen a una forma.

El reconocimiento de patrones requiere algoritmos capaces de localizar en una imagen procesada características (instancias) que puede contener un objeto, las cuales pudieran estar en distintas escalas, posiciones y ángulos.

Las RNAS deben ser entrenadas para reconocer objetos basados en sus píxeles o mediante el mapeo del contenido o características de un segmento dentro de un espacio de características indicado como entrada para un clasificador neuronal; por último una vez detectado un probable objeto éste es etiquetado.

### III. MODELO

La precisión de un algoritmo es medible respecto a la etapa de pre-procesamiento se aplicará una ecualización de histograma al contar con muchos píxeles cercanos al gris que al ser ecualizado la luz entre ellos queda distribuida; aumentando el contraste y permitiendo al módulo de reconocimiento mayor precisión; sin embargo esto incrementa

el ruido por lo que se aplicará una función de densidad de probabilidad  $f_{dp}$  con una variable  $x|0 \leq x \leq 1$ .

La nueva imagen  $s$  con distribución uniforme de píxeles en escala de grises viene dada por la función de transformación del histograma  $T$ :

$$s = T(x) \quad (1)$$

$$f_s(s) = f(x) \frac{dx}{ds} \Big|_{x=T^{-1}(s)} \quad (2)$$

$$f_s(s) = 1 \leftrightarrow T_{\rightarrow} S_k = T(x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \quad (3)$$

Donde la nueva  $f_{dp}$  asociada al histograma es:

$$f_k(x_k) = \frac{n_k}{n} \quad 0 \leq x_k \leq 1 \quad (4)$$

Donde  $k = 0, 1, \dots, 2^q - 1$ ; donde  $q$  es el número bits del sistema de captura (ópticos),  $n_k$  píxeles en la imagen normalizada,  $x_k$  y  $n$  los píxeles totales.

Para la segmentación se aplicará el algoritmo de crecimiento mezclado que asegura que un punto no pertenece más que a una sola zona cuyo principio estadístico es la media aritmética  $\bar{X}$  y la desviación estándar  $\sigma$  de un conjunto  $n$  de puntos.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{(k,l) \in R_i} (f(k,l) - m_i)^2} \quad (5)$$

Por lo que para decidir si una región  $R_1$  debe conbinarse con una  $R_2$  se debe evaluar:

$$|m_1 - m_2| < k \cdot \sigma_i \quad ; i = 1, 2 \quad (6)$$

Para el análisis y reconocimiento de patrones se programan funciones que utilizan los bordes de objetos previamente detectados en el módulo anterior para agruparlos en parámetros que sirven para describir las características del objeto a reconocer como forma y orientación.

Los descriptores de características discriminantes deberán servir para brindar diferencias entre el objeto y otro; así mismo deben ser independientes entre sí y suficientes para describir la pertenencia de un objeto a una clase.

Para el sistema se utilizará un descriptor de región, el cuál analiza el perímetro del objeto e infiere mediante sus características.

El algoritmo seleccionado es la obtención del centroide mediante la media de las coordenadas de todos los puntos internos del objeto. La coordenada del centroide  $(X_c, Y_c)$  viene dada por:

$$X_c = \frac{\bar{x}_{10}}{\bar{x}_{\infty}} \quad (7)$$

$$\bar{x}_{10} = \sum_{y=0}^{F-1} \cdot \sum_{x=0}^{C-1} x^* p(x, y) \quad (8)$$

$$\bar{x}_{\infty} = \sum_{y=0}^{F-1} \cdot \sum_{x=0}^{C-1} p(x, y) \quad (9)$$

Donde:

$X_c = x$  – posición hasta el centro de gravedad  
 $x = \text{pixles } x$  – coordenada  
 $p(x, y) = \text{valor en escala de gris del pixel}$   
 $F = \text{Filas}$   
 $C = \text{Columnas}$

Una vez localizada alguna característica en el objeto se utilizará la técnica de la ventana frontera; la cuál utiliza las coordenadas superior izquierda e inferior derecha para calcular la ventana contenedora del perímetro de la forma encontrada dadas por  $a(x_1 ; y_1)$  y  $b(x_2 ; y_2)$ .

Para obtener los perímetros de los objetos reconocidos se utiliza la suma de pixeles del perímetro del objeto por el factor unidad en los horizontales y verticales; mientras que para diagonales es por la diagonal del pixel ; siendo el perímetro  $p$  como:

$$p = n_x s_x * n_y s_y * n_d \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad (10)$$

Donde:

$p = \text{perímetro del patrón/objeto}$   
 $n_x = \text{número de pasos horizontales}$   
 $n_y = \text{número de pasos verticales}$   
 $n_d = \text{número de pasos diagonales}$   
 $s_x = \text{factor de escala en dirección } x$   
 $s_y = \text{factor de escala en dirección } y$

Para el acondicionamiento a una serie de capturas continuas del objeto se utilizan RNAs de tipo multicapa  $m$  [7] con retropropagación a modo que los errores medidos en la salida de la red se conecten hacia neuronas ocultas para generar una delta de toda la red; de modo que una función continua en un espacio  $x^n, x \rightarrow m$  al agrupar en capas diferentes niveles a las neuronas, bien definidas por las capa de entrada, las ocultas y la de salida; toda conexión siempre se dirigirá hacia adelante (feedforward).

Las conexiones utilizan un umbral que se modela como una conexión constante cuyo valor constante es 1.

La activación de las RNAs de entrada  $e_i^1$  son dadas por[7]:

$$e_i^1 = x_i; i=[1,2.. n_i] \quad (11)$$

Con su patrón de entrada:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_{n1}] \quad (12)$$

La activación de las RNAs ocultas ( $o_i^c$ ) que transforman la entrada mediante una función de activación  $f$  por sus pesos  $w$  son dadas por[7]:

$$(o_i^c) = f \left( \sum_{j=1}^{n_{c-1}} w_{ji}^{c-1} o_j^{c-1} + u_i^c \right) \quad (13)$$

Donde:

$$i = [1,2 \dots n_c]; c = [2,3 \dots c - 1] \quad (14)$$

La activación de las RNAs de salida  $s_i^c$  se genera por la función de activación  $f$  con la suma de los productos de entrada que reciben los pesos  $w$  de la capa oculta y son dadas por [7]:

$$y_i = (s_i^c) = f \left( \sum_{j=1}^{n_{c-1}} w_{ji}^{c-1} s_j^{c-1} + u_i^c \right) \quad (15)$$

Donde el vector de salida de las RNAs es:

$$y_i = [y_1, y_2 \dots y_{n_c}] \quad (16)$$

Para el entrenamiento se utilizará el método Levenberg-Marquardt [8] partiendo de un vector de pesos  $w$  dado por:

$$w(n+1) = w(n) - H(n)^{-1} g(n_t) \quad (17)$$

Siendo  $g(n)$  el vector gradiente en un tiempo  $t_n$  y  $H(n)$  la matriz segunda derivada Hessiana de la función error respecto a  $w$  en los umbrales  $u$  respecto a  $t_n$ .

La matriz Hessiana queda como la matriz Jacobiana con la primeras derivadas de la función de error de la RNA  $wu$ :

$$H = J^T J \quad (18)$$

Y su gradiente con el vector de error  $e$  como:

$$g = J^T e \quad (19)$$

El algoritmo Levenberg-Marquardt [8] actualiza los  $w$  en donde  $\mu$  es la tasa de aprendizaje como:

$$w(n+1) = w(n) [J^T J + \mu I]^{-1} J^T e \quad (20)$$

#### IV. PROGRAMACIÓN

Para poder reconocer un patrón se parte de la definición de las características de esta; es decir las propiedades de regiones de la imagen a procesar, para lo cual es necesario llevar a cabo el algoritmo general de la figura 1.

Para determinar las áreas de imágenes, etiquetarlas y eliminar las que probablemente no son.

Para el pre-procesamiento En Matlab se utilizó un módulo de lectura de una webcam, una vez adquirida la imagen mediante la función `imread` se le aplicó una conversión de RGB a escala de grises mediante la función `rgb2gray` para un rápido procesamiento que utiliza (1)(2)(3).

Posteriormente para el filtrado de datos y trabajo del archivo se realizó el cálculo el umbral de transformación de la función mediante su binarización para posteriormente imprimirla en pantalla transformada usando (4), como se muestra en la figura 2.

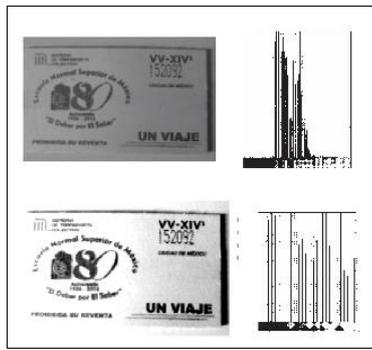


Fig. 2. Resultado de la normalización

Para la segmentación usando (5) (6) se generó un arreglo para el etiquetado de elementos conectados en la imagen mediante la función `bwlabel` en una matriz y el conteo de los elementos encontrados en otra generando identificadores para cada característica (forma) encontrada.

Las propiedades de los objetos se generó mediante la función `regionprops` la cual utiliza la matriz que contiene los elementos encontrados en la imagen anteriormente descritos para generar una estructura de la matriz con cada uno de los elementos encontrados mediante una “ventana frontera” (7) (8) (9) (10) que contiene cada propiedad obteniendo su área, el centroide y la coordenada  $(x,y)$  superior izquierda (de donde comienza a dibujarse la ventana) con su  $y$  y largo y ancho de cada “ventana frontera” [5] mediante la función `rectangle`.

Se procede a eliminar áreas menores al valor del objeto mediante la función `find` para brindarnos un vector de identificadores en rojo.

Se procede a colorear en azul aquellas menores y a eliminarlas de forma iterativa y recargar la imagen sin el objeto detectado.

Al volver a cargar una imagen que cuente con los patrones descritos aparecerán éstos y la indicará como que corresponde a la misma con la etiqueta indicada, como aparece en la figura 3.



Fig. 3 Resultado de la segmentación y reconocimiento en entrenamiento mostrando las 3 imágenes en la ventana.

En caso de no ser igual indica como no reconocido.

Al final se pueden contar cuántos de éstos objetos se encuentran en una escena de cámara.

Para el entrenamiento se simuló una RNA multicapa que aplica los modelos de capas descritos en (11) (12) (13) (14) (15) para brindar una salida basada en (16) y un entrenamiento basado en la función (20) utilizando distintas tomas y archivos de imagen de un boleto de aniversario de la ENSM del STC mexicano, como se muestra en la figura 4 y 5.

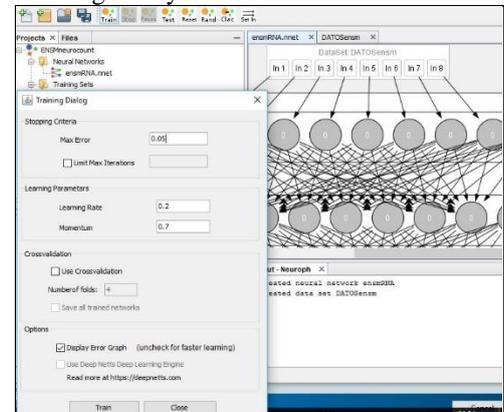


Fig. 4. Modelado RNAs multicapas

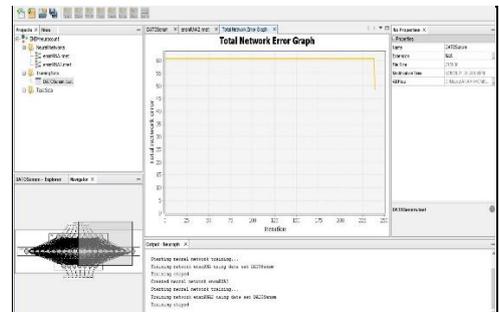


Fig. 5. Entrenamiento RNAs multicapas

## V. RESULTADOS.

El entrenamiento se llevó a cabo con un error máximo de 0.05 con 600 iteraciones, obteniendo un mejor entrenamiento con 8 neuronas de entrada, 20 ocultas y 7 de salida con una función sigmoideal y propagación para poder lograr la aceptación del entrenamiento de la RNA.

Al agregar una interfaz de conteo final y ocultar el procesamiento se colocaron dos imágenes de boletos en distintos estados y el sistema pudo reconocer ambos como de la misma clase y contarlos mediante la suma de etiquetas, como se muestra en la figura 6.

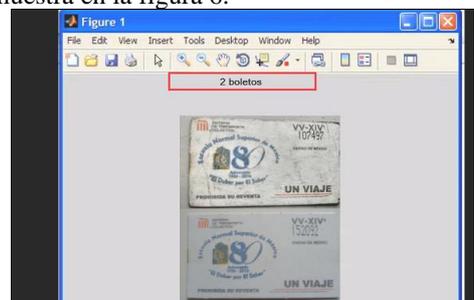


Fig. 6 GUI de conteo en MATLAB

Al colocar boletos del STC que no eran del 80 aniversario de la ENSM el sistema no las reconocía dentro del patrón de entrenamiento y marcaba 0 en el conteo.

## VI. CONCLUSIONES

El modelo general de reconocimiento de patrones de la figura 1 permite utilizar distintas técnicas como las descritas en el artículo.

Los algoritmos descritos en las ecuaciones del artículo permitieron la transformación en escala de grises y su segmentación para un reconocimiento fácil.

Se propone experimentar con técnicas de color aunque se podría perder datos de las etiquetas de segmentación; sin embargo para boletos similares del STC podría generar una ventaja de patrones pero decrementaría el tiempo de proceso.

A pesar de estar arrugado y con manchas una de las imágenes del boleto, el sistema fue capaz de reconocer mediante las ventanas sus características segmentadas mediante los algoritmos de vectorización de figuras.

Matlab permite la carga de distintas funciones, modelos y algoritmos; así como su modificación para incrementar la precisión.

La simulación de entrenamiento permite ir decrementando la gráfica de la figura 5 con 30 minutos de entrenamiento hasta un 0.5 con distintas iteraciones de imágenes.

La técnica de ventanas y centroide permite una detección rápida de patrones en MATLAB.

El método para el entrenamiento de las RNAs Levenberg-Marquardt[8] funciona decrementando los errores en un entrenamiento relativamente con distintas tomas de objetos a distinta iluminación y la base de datos en extensión .csv permite una portabilidad para distintos lenguajes como MATLAB.

## REFERENCIAS

- [1] Marques de Sá., J.P.: Pattern Recognition: Concepts, Methods and Applications.: Springer Springer-Verlag Berlin Heidelberg (N.Y., 2001.)
- [2] Nalwa, V.S.: A Guided Tour to Computer Vision.: Addison-Wesley, (USA,1993).
- [3] Bartle, R. G.: The Elements of Integration and Measure Theory.: Wiley. (USA, 1995).
- [4] Parzen, E.: On estimation of a probability density. Uilction and mede. The Arllals of Mathematical Statistics. (N.Y., 1962.)
- [5] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.G.: Sistema generador de mapas para robots móviles. Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica. Año 1 No. 1. p.p. 89-94.: Editorial UNAM. Fes Cuautitlán. (México, 2017).
- [6] Fajardo-Rendón, M. y Herrera-Armendia, F.G.: El uso de la transformada de Hough para la construcción de un sistema SLAM para navegación de robots.: CICS (Veracruz, 2015).
- [7] Rumelhart, D., Hinton, G. & Williams, R.: Learning representations by back-propagating errors.: Nature 323, 533-536 (USA, 1986). <https://doi.org/10.1038/323533a0>
- [8] Levenberg, K.: A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares. The Quarterly of Applied Mathematics, 2: 164-168 (USA, 1944).

# Aproximación del valor de la aceleración de la gravedad en la colonia el Rosario, Azcapotzalco CDMX a través de un péndulo simple casero.

Jaime William Flores Tecalco

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Alumno de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México.  
William10\_511@hotmail.com

william10\_511@hotmail.com

**Resumen-** En este artículo se ilustra una manera sencilla de cómo aproximar el valor de la aceleración gravitacional a través del montaje de un péndulo simple casero; la experimentación y los valores de los datos fueron medidos en la colonia El Rosario, delegación Azcapotzalco, CDMX, además se muestran breves deducciones de las fórmulas del movimiento armónico simple y el péndulo simple que se ocuparán en la aproximación.

**Palabras Clave-** Movimiento armónico simple, fuerza restauradora, péndulo simple, SciDAVis.

**Abstract-** This article illustrates a simple way to approximate the value of gravitational acceleration through the assembly of a simple homemade pendulum; the experimentation and the data values were measured in El Rosario, Azcapotzalco, CDMX, addition brief deductions of the formulas for simple harmonic motion and the simple pendulum are shown that will be dealt with in the approximation.

**Keywords-** Simple harmonic motion, restoring force, simple pendulum, SciDAVis.

**Mathematical Subject Classification:** 68T10.

## I. INTRODUCCIÓN

Un error común es pensar que el valor de la aceleración de la gravedad en todas las partes de la tierra es 9.81 m/s<sup>2</sup>. Suena tan familiar pensar en esta cantidad automáticamente al mencionar la palabra gravedad, pero esta aproximación es válida para solo determinados lugares de nuestro planeta.

Existen varias circunstancias por las cuales cada lugar de nuestro mundo posee variaciones en la medida de la aceleración de la gravedad. Algunas de ellas son: la forma achatada de nuestro planeta; la topografía local, la fuerza centrífuga que se ve alterada por la latitud, etc.

En este artículo se ilustra una manera sencilla de como aproximar el valor de la aceleración gravitacional a través del montaje de un péndulo simple casero y nuestra ubicación determinará los valores a manejar.

Esta dinámica está enfocada al aprendizaje y experimentación del lector. Por ende, los datos mostrados están relacionados con la Colonia el Rosario de la delegación Azcapotzalco en Ciudad de México, donde se realizó la medición.

Se intenta mostrar paso a paso el recorrido hacia la aproximación de la gravedad, por lo tanto, se da un pequeño preámbulo respecto al movimiento armónico simple y sus deducciones.

Posteriormente se ilustran tablas y gráficas que relacionan la teoría con la práctica y se ocupará el software SciDAVis 2.3.0 para obtener el error de propagación con el método de mínimos cuadrados para las desviaciones. .

## II. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama movimiento armónico simple [1].

Un ejemplo básico de este movimiento se representa al ejemplificar un bloque de masa  $m$  unido a un resorte en una superficie horizontal sin fricción.

En la posición de equilibrio, el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre la masa. Cuando la masa es desplazada a una cierta cantidad  $x$  de su posición de equilibrio, el resorte aplica una fuerza que viene dada por la ley de Hooke.

$$F_x = -Kx \quad (1)$$

$F_x$  es la fuerza restauradora, es decir, la fuerza que se dirige hacia su posición de equilibrio. Donde  $K$  es la constante del resorte, característica de su rigidez [2].

Podemos combinar (1) con la segunda ley de Newton y obtenemos que la fuerza restauradora es igual a la masa  $m$  por la aceleración restauradora.

$$F_x = ma_x \quad (2)$$

Podemos sustituir (1) en (2) y reescribir la aceleración restauradora por la segunda derivada de la posición  $x$  respecto al tiempo  $t$ .

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

Es decir:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (4)$$

Aplicaremos una sustitución conveniente para la resolución de (4).

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (6)$$

La ecuación diferencial de segundo orden (6) requiere una función  $x(t)$  que satisfaga la relación, entonces  $x(t)$  debe ser una función cuya derivada sea la negativa de la función misma y multiplicada por  $\omega^2$ . Para beneficio de nosotros, las funciones seno y coseno tienen esta propiedad. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t \quad (7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t = \frac{d}{dt} (-\omega \sin \omega t) = -\omega^2 \cos \omega t \quad (8)$$

La segunda derivada de un coseno (o de un seno) nos da de nuevo la función original multiplicada por un factor negativo  $-\omega^2$ .

Esta propiedad no sufre alteración si multiplicamos a la función coseno por cualquier constante. [3].

Elegimos la constante  $A$ , entonces una solución a la ecuación diferencial (6) es:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

De donde  $A$ ,  $\omega$  y  $\varphi$  son constantes.

Para que no quede ninguna duda de que (9) satisface a (6), vamos a buscar la primera y la segunda derivada de (9).

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

Por lo tanto, al comparar (9) y (11) es claro que  $d^2x/dt^2$  es igual a  $-\omega^2x$ , satisfaciendo a (6).

Los parámetros  $A$ ,  $\omega$  y  $\varphi$  son constantes del movimiento,  $A$  es la amplitud del movimiento, es decir, el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección  $x$  positiva o negativa. El ángulo contante  $\varphi$  se llama constante de fase y junto a  $A$ , se determina por la posición y la velocidad de la partícula en  $t=0$ .

$\omega$  se llama frecuencia angular, es una medida de que tan rápido se presentan las oscilaciones por unidad de tiempo, su unidad es radián por segundo.

La frecuencia angular  $\omega$  se puede obtener a través de (5).

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (12)$$

El periodo  $T$  es el tiempo transcurrido cuando  $x$  se repite, es decir:

$$x(t) = x(t + T) \quad (13)$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega(t + T) + \varphi) \\ = A \cos(\omega t + \varphi + \omega T) \quad (14)$$

Si las funciones seno y coseno se repiten cuando la fase se incrementa en  $2\pi$ , igualando y resolviendo en (14) tenemos:

$$\omega T = 2\pi \quad (15)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (16)$$

La frecuencia  $F$  es la recíproca del periodo, la frecuencia representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo, sus unidades son ciclos por segundo o Hertz ( $Hz$ ).

$$F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (17)$$

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T} \quad (18)$$

Ahora vamos a obtener el recíproco de (12)

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (19)$$

Vamos a sustituir (18) en (16) y obtenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (20)$$

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

Estas sustituciones son de gran ayuda porque ahora  $T$  y  $F$  solamente dependen de la masa  $m$  de la partícula y la constante  $K$  del resorte y no de los parámetros del movimiento.

### III. PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple es un cuerpo idealizado de una partícula suspendida de un cordón ligero inextensible. Cuando se le lleva a un lado de su posición de equilibrio y se suelta, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. [3].

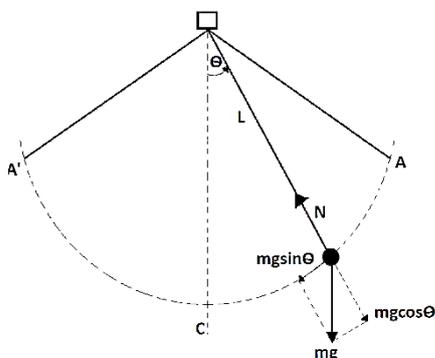


Fig. 1.- Diagrama de péndulo simple.

La trayectoria de la partícula (llamada en ocasiones pesa o lenteja) no es una recta sino el arco de un círculo de radio  $L$  igual a la longitud del cordón. [4].

Inicialmente la partícula se encuentra en reposo, para que comience el movimiento se debe mover y soltar a otro punto, por ejemplo, al punto  $A$ , entonces la lenteja se comenzará a trasladar del punto  $A$  hacia un punto simétrico, el punto  $A'$ .

Si no hubiera fuerza de fricción, el sistema se movería de forma indeterminada o indefinida; pero al existir dicha fuerza, la partícula regresará al reposo  $C$ .

Si no existiera el cordón, la partícula caería libremente producto de la fuerza que produce la masa de la tierra respecto a la partícula, en otras palabras, por su peso  $w$ .

El peso  $w$  de la masa  $m$  suspendida del cordón se puede descomponer en dos componentes, una que es la que produce la fuerza de tensión en el cordón y otra que es la tangencial al arco de la trayectoria de la partícula.

Entonces, el ángulo que subtiende es  $\theta$ . Si el peso  $w$  es:

$$w = mg \quad (22)$$

Las componentes de  $w$  son:

$$w_1 = -mg \sin \theta \quad (23)$$

$$w_2 = -mg \cos \theta \quad (24)$$

Podemos notar que las fórmulas (23) y (24) son negativas porque  $g$  es una aceleración que siempre está dirigida hacia abajo.

Como (24) está en dirección del cordón de longitud  $L$ , el cual no es elástico, es igual a la tensión, pero dirigida en sentido contrario. Dado que es la única fuerza, la componente tangencial a la trayectoria es la única responsable del movimiento de la partícula.

De acuerdo con la segunda Ley de Newton, se debe cumplir que la fuerza resultante  $F_r$  debe ser igual a la masa  $m$  por la aceleración resultante  $a_r$ .

$$F_r = ma_r \quad (25)$$

Donde la aceleración resultante es el cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo.

$$a_r = \frac{dV}{dt} \quad (26)$$

Y a su vez, podemos reescribir la ecuación (26) como el cambio instantáneo de la posición respecto al tiempo.

$$a_r = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (27)$$

Es decir, la aceleración resultante es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo.

Si la componente (24) a lo largo de la cuerda se anuló con la normal  $N$  y la única fuerza resultante es (23), podemos reescribir (25) como:

$$F_r = -mg \sin \theta \quad (28)$$

Lo cual nos lleva a:

$$ma_r = -mg \sin \theta$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g \sin \theta = 0 \quad (29)$$

Donde  $s$  es el desplazamiento a lo largo del arco y  $\theta$  es el ángulo que subtiende a la cuerda de longitud  $L$ , es decir, tenemos una ecuación diferencial de segundo orden con dos incógnitas, que son  $s$  y  $\theta$ , y una función periódica seno.

Para efectos prácticos, debemos convertir (29) en una ecuación diferencial de segundo orden, pero de una sola incógnita, para ello vamos a ocupar ángulos en radianes.

Se define el radián como el ángulo que en una circunferencia subtiende respecto del centro  $O$  un arco  $MN$  con igual longitud que el radio  $r$ .

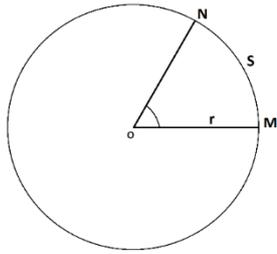


Fig. 2.- Diagrama de un Radián

Podemos observar que podemos extrapolar la teoría de un radián a un péndulo simple sustituyendo el radio  $r$  por la longitud  $L$  del cordón, la cual genera de igual manera un arco de circunferencia  $s$ .

Entonces podemos hacer la igualación:

$$\theta = \frac{s}{L}$$

$$s = L\theta \quad (30)$$

Al aplicar doble derivada a (30) obtenemos:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (31)$$

En (31) observamos que la velocidad tangencial es igual a  $L$  por la aceleración angular. Al sustituir en (29) tenemos:

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (32)$$

Hemos obtenido una ecuación del péndulo (32) con una incógnita que es el ángulo. Ahora debemos simplificarla un poco más, para ello debemos analizar la función seno.

El seno se define en grados o en radianes, es decir, en cantidades adimensionales, pero con algunas equivalencias (Tabla 1).

Tabla 1.- Equivalencia de grados y radianes.

Grados	Radianes
0	0
90°	$\pi/2$
180°	$\pi$
270°	$3\pi/2$
360°	$2\pi$

Si realizamos la gráfica de la función iniciando de cero, nos percatamos de que tiene un valor máximo en 1 y un valor mínimo en -1 en el eje vertical.

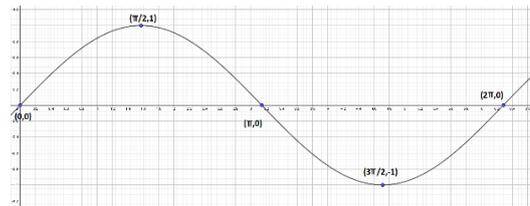


Fig. 3.- Periodo geométrico de la función seno es  $2\pi$

La función seno se repite cada  $2\pi$  radianes, es decir, la función seno tiene un periodo geométrico igual a  $2\pi$ .

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi) \quad (33)$$

Si expresamos el ángulo en radianes y obtenemos su función seno, conforme vamos disminuyendo el ángulo (tendiendo a cero) podemos decir que:

$$\sin \theta = \theta \leftrightarrow \angle \theta < 10^\circ \quad (34)$$

Tabla 2.- Función  $\text{sen } \Theta$  den radianes.

$\Theta$ en Grados	$\Theta$ en Radianes	Sen( $\theta$ )
10°	$\pi/18 \approx 0.1745$	0.1736
9°	$\pi/20 \approx 0.1570$	0.1564
8°	$2\pi/45 \approx 0.1396$	0.1391
7°	$7\pi/180 \approx 0.1221$	0.1218
6°	$\pi/30 \approx 0.1047$	0.1045

Retomando, si el desplazamiento a lo largo del arco es:

$$s = L\theta \quad (30)$$

Y para ángulos pequeños (34) esto es casi un movimiento en línea recta, obtenemos sustituyendo en (28):

$$F_r = -mg \sin \theta \quad (28)$$

$$F_r = -mg\theta$$

$$F_r = -mg \frac{s}{L}$$

$$F_r = -\left(\frac{mg}{L}\right)s \quad (35)$$

La fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento [3]. Y la constante de fuerza es:

$$K = \frac{mg}{L} \quad (36)$$

Ahora vamos a sustituir (36) en (20)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (20)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg}} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (37)$$

#### IV. CÁLCULO DE LA GRAVEDAD EN LA COLONIA ROSARIO.

Para comenzar con la aproximación de la aceleración de la gravedad se debe instalar un péndulo simple en un lugar propicio para su experimentación. En esta ocasión el péndulo se instaló sobre una base fija en una pared, se situó un transportador circular para poder tener la amplitud inicial correcta (Fig.4); además se colocó una cinta métrica para tener siempre perspectiva las mediciones.



Fig. 4.-Transportador incorporado a péndulo simple para medir la amplitud inicial.

Una vez que se realiza el montaje (Fig. 5), se procede a obtener el valor del tiempo de un periodo  $T$  variando la longitud del cordón  $L$ .



Fig. 5.- Montaje del péndulo simple

Para ello se ocupa una amplitud inicial constante menor o igual a  $10^\circ$ . Se utilizan diez variaciones de longitudes  $L$  del cordón (desde 0.1m a 1m, aumentando en cada ocasión 0.1m). Se realizan cinco mediciones (M1-M5) con cronómetro por

cada longitud  $L$  con sus respectivas oscilaciones (diez en esta ocasión) para obtener un valor promedio de periodo  $T$ .

Todos los datos se redondean a dos cifras significativas para su mejor manejo.

Tabla 3.- Cinco mediciones de 10 oscilaciones por cada longitud  $L$ .

Longitud $L$ (m)	M1 (s)	M2 (s)	M3 (s)	M4 (s)	M5 (s)
0.1	6.44	6.40	6.39	6.48	6.31
0.2	9.15	9.15	9.30	9.05	9.10
0.3	10.53	10.61	10.80	10.72	10.65
0.4	12.32	12.36	12.47	12.34	12.32
0.5	14.05	14.14	14.20	14.28	14.18
0.6	15.38	15.29	15.27	15.34	15.33
0.7	16.51	16.54	16.71	16.60	16.58
0.8	18.02	17.58	17.69	17.68	17.59
0.9	19.27	19.24	19.20	19.21	19.13
1	20.22	20.10	19.85	20.14	20.17

Se obtiene un valor representativo ( $M$ ) de cada medición por medio de un promedio de mediciones.

Tabla 4.- Longitudes  $L$  con sus valores representativos  $M$ .

Longitud $L$ (m)	$M$ (s)
0.1	6.40±0.1
0.2	9.15±0.1
0.3	10.66±0.1
0.4	12.36±0.1
0.5	14.17±0.1
0.6	15.32±0.1
0.7	16.59±0.1
0.8	17.71±0.1
0.9	19.21±0.1
1	20.10±0.1

Se encuentra el valor de cada periodo  $T$  dividiendo cada valor representativo entre diez (por el número de oscilaciones medidas).

Tabla 5.- Longitudes  $L$  con sus periodos  $T$  correspondientes.

Longitud $L$ (m)	$T$ (s)
0.1	0.64
0.2	0.92
0.3	1.07
0.4	1.24
0.5	1.42
0.6	1.53
0.7	1.66
0.8	1.77
0.9	1.92
1	2.01

Proseguimos a encontrar una relación de la longitud  $L$  respecto con el periodo  $T$ . Para ello podemos hacer uso de una gráfica para apoyarnos en esta búsqueda.

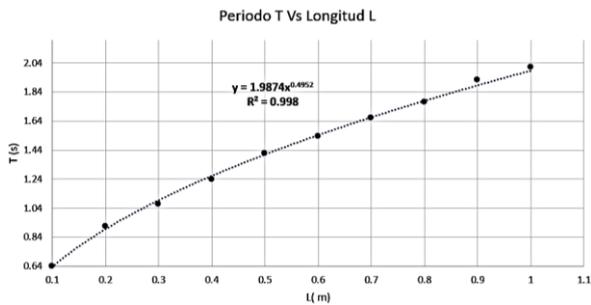


Fig. 6.- Gráfica  $T(s)$  vs  $L(m)$ .

Se puede observar que la relación entre la longitud  $L$  y el periodo  $T$  es de forma exponencial.

$$T = k L^n \quad (38)$$

$$y = 1.9874 x^{0.4952} \quad (39)$$

Donde  $n$  es el exponente muy próximo a 0.5. De aquí podemos decir que el periodo  $T$  y la raíz cuadrada de la longitud  $L$  son proporcionales.

$$L^{0.5} = L^{\frac{1}{2}} = \sqrt{L} \quad (39)$$

Corroboramos esta proporción haciendo un análisis de la longitud  $L$  contra el periodo cuadrado  $T^2$ . Para ello se obtienen los valores a partir de la Tabla 5.

Tabla 6.- Longitudes  $L$  con sus periodos cuadrados  $T^2$  correspondientes.

$L(m)$	$T^2$
0.1	0.41
0.2	0.84
0.3	1.14
0.4	1.53
0.5	2.01
0.6	2.35
0.7	2.75
0.8	3.14
0.9	3.69
1	4.04

Al graficar los valores de la Tabla 6 obtenemos una gráfica linealizada.

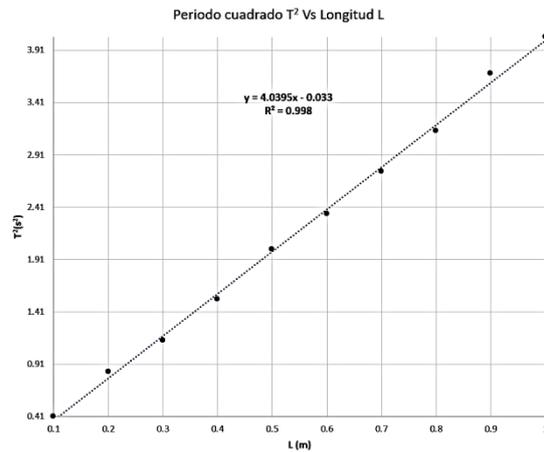


Fig. 6.- Gráfica  $T^2(s^2)$  vs  $L(m)$ .

Cuando  $T^2$  está en el eje de las ordenadas y  $L$  en el eje de las abscisas, la relación bidimensional de ellas representa una recta de pendiente  $m$ .

Podemos encontrar el valor de la pendiente  $m$  elevando al cuadrado (37) y reescribiendo en la forma de ecuación pendiente-ordenada al origen de una recta, es decir,  $y = mx + b$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (37)$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L \quad (40)$$

De (40) se observa claramente el valor de la pendiente  $m$ .

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \quad (41)$$

Por lo tanto, usando (41) se puede calcular la aceleración de la gravedad reescribiendo en función de  $g$ .

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \quad (42)$$

Se ocupa el método de mínimos cuadrados para la regresión lineal de los valores de la Tabla 6. Para ello se hace uso del software SciDAVis para obtener la pendiente y su error de medición.

SciDAVis - sin título  
 Regresión Lineal ajuste del conjunto de datos: Tabla1\_2, usando función : A\*x+B  
 errores estándar Y: Desconocido  
 Desde x = 0.1 a x = 1  
 B (y-intercepción) = -0.0306666666666667 +/- 0.03926895090336  
 A (pendiente) = 4.03757575757576 +/- 0.0632876448222255  
 -----  
 Chi^2 = 0.0264351515151515  
 R^2 = 0.99803829502841

Fig. 7.- Datos obtenidos en SciDAVis a partir de la Tabla 6.

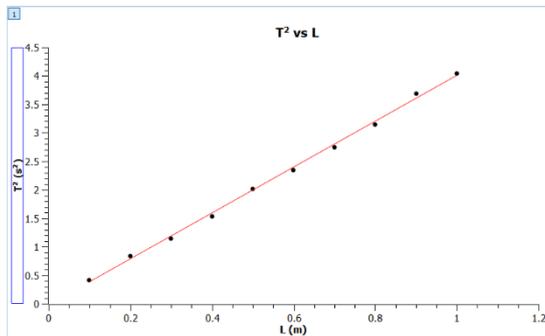


Fig. 8. Regresión lineal T<sup>2</sup> vs L realizada en SciDAVis.

Resta sustituir en (42) el valor de la pendiente m (en SciDAVis la pendiente es A) de la Fig. 7, ocupando dos cifras significativas.

$$m = 4.04 \quad (43)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \quad (42)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{(4.04)}$$

$$g = 9.77 \frac{m}{s^2} \quad (44)$$

El error de g es dos veces el error de la pendiente m.

$$\Delta g = 0.1 \frac{m}{s^2} \quad (45)$$

Por lo tanto, el valor de la gravedad g obtenido es:

$$g = 9.77 \pm 0.1 \frac{m}{s^2} \quad (46)$$

## V. CONCLUSIONES

La aceleración de la gravedad puede ser medida con diferentes métodos y herramientas, unas más sofisticadas que otras y algunas no al alcance económico de todas las personas o instituciones; pero cualquier instrumento, con este fin, nos sirve para aproximar un valor g de acuerdo con la ubicación donde se analice.

La utilización de un péndulo simple es un instrumento que está a la disposición de casi cualquier persona para poder determinar un valor gravitatorio estimado local y poner en

práctica la teoría aprendida en las clases de física y de matemáticas.

Podemos notar, después de la experimentación mostrada, que el valor aproximado de la aceleración de la gravedad en la col. El Rosario es 9.77 m/s<sup>2</sup> más menos su error. Tener esta aproximación es útil para diferentes tipos de experimentos o procesos industriales locales. Es fundamental entender que la aceleración de la gravedad varía depende de donde se mire.

## REFERENCIAS

- [1] Serway, R. Jewett, J. Physics for Scientists and Engineers 6 ed. Thompson. Brooks/Cole (U.S.A. 2008)
- [2] Tipler, P. A. Physics for Scientist and Engineers 4 ed. W.H. Freeman and Company/Worth Publisher. (New York, 1999).
- [3] Resnick, R. H., D. Krane, K. Física Vol. 1. Compañía Editorial Continental. (México, 1993).
- [4] Sears, F. Zemansky, M. Young, H. Freedman, R. Física Universitaria 13 ed. Pearson. (México, 2004)

# La unidad musical $\mathfrak{M} = 2^{1/12}$ y una posible representación en el campo complejo $\mathbb{C}$ .

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.  
harmendia@gmail.com

**Resumen-** La presente contribución que expongo a manera de ensayo, es el informe escrito correspondiente al discurso que ante los miembros de la Academia Mexicana de Educación presenté el martes 10 de diciembre de 2019 como parte del protocolo de ingreso a esta honorable Institución, evento llevado a cabo en el Palacio del Arzobispado de la Ciudad de México. En este artículo expongo la posible representación de la unidad musical en el campo de los números Complejos. Esta unidad musical fue establecida matemáticamente desde el siglo XVIII y llevada a la técnica del teclado en la majestuosa obra de J. S. Bach. Recorro al método histórico – descriptivo para llevar a cabo el desarrollo de los objetos matemáticos que son los que fundamentan la teoría musical, no sin dejar de mencionar que la escritura musical tiene su propia simbología, sintaxis y semántica. Aprovecho estas líneas para agradecer el interés y el apoyo de los Doctores Benjamín González Roaro y Armando Estrada Parra, así como al Doctor Eduardo Zárate Salas por el agradable reencuentro en este evento.

**Palabras Clave-** estructura matemático-musical, tonos y semitonos musicales, campo de los números complejos, teorema de DeMoivre.

**Zusammenfassung-** Dieser Beitrag, den ich als Essay präsentiere, ist der schriftliche Bericht entsprechend der Rede, die ich am Dienstag, den 10. statt im Palast des Erzbischofs in Mexiko-Stadt statt. In diesem Artikel beschreibe ich die mögliche Darstellung der musikalischen Einheit im Bereich der komplexen Zahlen. Diese musikalische Einheit wurde seit dem 18. Jahrhundert mathematisch begründet und im majestätischen Werk von J. S. Bach auf die Tastentechnik übertragen. Ich greife auf die historisch-deskriptive Methode zurück, um die Entwicklung der mathematischen Objekte durchzuführen, die die Grundlage der Musiktheorie bilden, nicht ohne zu vergessen, dass musikalisches Schreiben seine eigene Symbolik, Syntax und Semantik hat. Mit diesen Zeilen danke ich dem Interesse und der Unterstützung der Ärzte Benjamin González Roaro und Armando Estrada Parra sowie des Doktors Eduardo Zárate Salas für das angenehme Wiedersehen bei dieser Veranstaltung.

**Slutelwoorden-:** *mathematisch-musikalische Struktur, Musiktöne und Halbtöne, komplexes Zahlenfeld, Satz von DeMoivre.*

**Резюме-** Этот вклад, который я представляю в качестве эссе, представляет собой письменный отчет, соответствующий речи, которую я представил членам Мексиканской академии образования во вторник, 10 декабря 2019 г., как часть протокола приема в это почетное учреждение, состоится во Дворце архиепископа в Мехико. В этой статье я раскрываю возможное представление музыкальной единицы в области комплексных чисел. Эта музыкальная единица была математически обоснована с 18 века и перенесена в клавишную технику в величественном произведении Я. С. Баха. Я прибегаю к историко-описательному методу для разработки математических

объектов, лежащих в основе теории музыки, не забывая при этом, что музыкальное письмо имеет свою собственную символику, синтаксис и семантику. Я беру эти строки, чтобы поблагодарить за интерес и поддержку докторов Бенджамина Гонсалеса Роаро и Армандо Эстрада Парра, а также доктора Эдуардо Сарате Саласа за приятное воссоединение на этом мероприятии.

**ключевые слова-** математико-музыкальная структура, музыкальные тона и полутона, поле комплексных чисел, Теорема ДеМуавра.

**Mathematical Subject Classification:** 11-02.

## I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo lo dedico a la recopilación de los objetos matemáticos que se han utilizado para describir la estructura de la escala musical temperada en los 12 tonos mayores y los 12 tonos menores. Inicio con la descripción de la escala musical con base en los números racionales propuesta por Platón, quien también incursiona en los números irracionales y por tanto, los números Reales basándose en las aportaciones teóricas de los pitagóricos. Mi contribución consiste en analizar esta relación entre música y matemáticas en un conjunto de números mayor, el conjunto de los números complejos. Para este análisis tomo el valor tradicional de 256 Hz., correspondiente a la nota denominada do central, y no el valor de 261 Hz., acordado después de 1945 [1] y que rompe el esquema puro de las escalas musicales. (Carlo Bergonzi y otros investigadores piensan que después de la Segunda Guerra Mundial, la popularización de la radio, contribuyó a modificar el valor de la nota do central de 256 Hz a 261 – 263 Hz., pues los técnicos y empresarios, entre otros, aseguraron que las melodías eran percibidas “con un sonido mucho más brillante”, y durante todo este tiempo el valor de este sonido ha sido alterado varias veces).

## II. DESARROLLO.

Actualmente la aplicación del concepto de grupos Abelianos a los intervalos musicales opera sobre conjunto de notas, que es una combinación en la que puede basarse la definición de escala musical [2]. Toda escala musical es finita con base en dos aspectos: a) no existen en la escala musical dos notas que puedan superponerse; b) la escala musical tiene una nota inicial y una final. Pero para llegar a este concepto abstracto, debo analizar el gran trabajo de la recopilación y teorización el conocimiento musical con un fundamento

matemático, debido a la escuela de los pitagóricos que además me hace reflexionar sobre la influencia que tuvieron las culturas egipcias y babilónicas en el desarrollo del pensamiento griego por ejemplo, ellos no fechaban exactamente sus sucesos históricos, tal vez por desinterés o apatía. En cambio la cultura del Nilo y la babilónica habían estudiado con gran detalle y cuidado los hechos que se repiten con periodicidad en el tiempo [3]. Poseían un conocimiento muy exacto con relación al movimiento de los astros conocidos en aquella época, habiendo ingeniado un calendario que dividía el transcurrir del tiempo en semanas de siete días, cuyo nombre se relacionó con el de un planeta (vigente en nuestros días); en ese entonces el día solar medio se dividía en doce horas, y cada una de ellas en doce divisiones que contenían seiscientos partes cada una (que equivalen en la actualidad a los 86,400 segundos por día de 24 horas:  $(24)(60)(60) = (24)(3600) = (12)(12)(600) = (144)(600) = 86,400$ ). Con la cultura babilónica también se inició la división de la circunferencia en 360 grados y lograron una gran combinación de los sistemas de numeración decimal y duodecimal con bastante eficacia para el desarrollo de su sistema de pesas y medidas. Sin embargo este desarrollo tuvo más bien tintes de aplicación a la economía y la ingeniería y hubo que esperar a que llegase a la cultura griega para que este gran conocimiento tomase un concepto científico organizado, además de que muchos de los grandes pensadores de la cultura griega nacieron en sus colonias establecidas en Asia Menor. Un ejemplo muy común de esta influencia se puede localizar en la primera y segunda letras del alfabeto griego:  $A, \alpha$ ;  $B, \beta$  que fueron adaptadas de la cultura egipcia. En este idioma o en el sirio la palabra “cabeza de toro” iniciaba con el sonido “aleph”, cuyo símbolo era precisamente lo que significaba, y ya en Grecia se optó por un esbozo mucho más esquemático, es decir  $A, \alpha$ . La palabra casa iniciaba con el sonido “beth” y era representado como una B, pero girada 90 grados a la izquierda: , y se optó por los signos  $B, \beta$  [4]. En este orden de ideas es muy probable que el inicio del estudio de los sonidos y sus relaciones por los integrantes de la escuela pitagórica fueran influenciados de la misma manera. Así, Platón en su diálogo Timeo describe justamente el descubrimiento de los sonidos adoptando siete nombres para ellos además de la relación entre estos. Timeo fue un personaje que perteneció a la escuela de los pitagóricos y narra que el universo fue creado tomando en cuenta dos esencias, una divisible, la otra no, y de la combinación de ellas emana una tercera esencia de características intermedias. Es así que se separa el todo formando una parte, luego una segunda parte, doble, de la primera; una tercera equivalente a una vez y media la segunda parte y tres veces la primera; una cuarta parte, doble de la segunda; una quinta parte, triple de la tercera; una sexta parte, óctuple de la primera y, finalmente una séptima parte, veintisiete veces la primera [5] [6]. Esta descripción retórica la he interpretado en un contexto matemático de la siguiente forma [7]:

Sea  $P_1, P_2, \dots, P_7$ , las partes referidas por Timeo, entonces las expresiones son

$$P_1(1 + 2 + 3 + 4 + 9 + 8 + 27) \quad (1)$$

Se puede observar que son siete términos en la suma que bien pueden corresponder a los siete nombres de las notas

(aunque hemos heredado nombres latinos: do, re, mi, fa, sol, la, si); en este diálogo, Timeo se refiere únicamente a la secuencia de sonidos en un tono específico, do mayor en nuestros días. También, si expresamos (1) en forma de las dos esencias que mencioné anteriormente, se tiene:

$$2^0 + 2^1 + 3^1 + 2^2 + 3^2 + 2^3 + 3^3 \quad (2)$$

Las bases de las potencias se representan por los dígitos 2 y 3, que es posible interpretar como dichas esencias. La suma total  $P_1 = 54 = (2)(3^3)$ .

Es posible observar que la suma de los seis primeros términos de la serie es igual al séptimo término, relación que se aprecia en cualquier reescritura de la sucesión original. Ahora, puedo realizar el ejercicio de reescribir (1) en términos de las demás seis partes.

$$P_2 \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{9}{2} + 4 + \frac{27}{2} \right) \quad (3)$$

$$P_2 = 27 = 3^3 \quad (4)$$

$$P_3 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + 3 + \frac{8}{3} + 9 \right); \quad P_3 = 18 = (2)(3^2) \quad (5)$$

$$P_4 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 2 + \frac{27}{4} \right); \quad P_4 = \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2} \quad (6)$$

$$P_5 \left( \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 1 + \frac{8}{9} + 3 \right); \quad P_5 = 6 = (2)(3) \quad (7)$$

$$P_6 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{9}{8} + 1 + \frac{27}{8} \right); \quad P_6 = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2} \quad (8)$$

$$P_7 \left( \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27} + \frac{1}{3} + \frac{8}{27} + 1 \right); \quad P_7 = 2 \quad (9)$$

Como mencioné anteriormente, estas expresiones matemáticas sólo representan las relaciones mencionadas por Timeo y reescritas en términos de las otras seis y bien pueden representar los nombres de los sonidos musicales cuya relación en la actualidad corresponde a las escalas musicales, que están conformadas por cinco tonos y dos semitonos [8] [9]; así, la secuencia de sonidos musicales de la escala de Do Mayor es: do, re, mi, fa, sol, la, si. Los tonos están entre el do - re; re - mi; fa - sol; sol - la y la - si. Los dos semitonos están entre el mi - fa y si - do, del siguiente conjunto que repite los nombres y tiene una relación dos a uno en términos de frecuencia con el primer conjunto, como describiré en seguida. Esta secuencia de sonidos musicales aplica para todos los 12 tonos mayores (t-t-s-t-t-s); en el caso de los 12 tonos menores, la secuencia es: t-s-t-t-t-s). Esto significa que sin importar el tono, la secuencia debe respetarse con relación a su orden, es decir existe el principio del buen orden

en el mismo sentido que en matemáticas. Como se aprecia en el texto; a partir de estas ideas es posible completar la escala dodecafónica de 12 tonos mayores y 12 tonos menores, que debió heredarse de la influencia egipcia y babilónica, relacionada con el uso de este sistema de numeración, sobre todo en la medición de sucesos en el tiempo. Al continuar con su discurso, Timeo menciona que se llenaron los intervalos dobles y triples, de tal modo que hubiese en cada uno dos partes medias, de las que la primera exceda a uno de sus extremos y además sea sobrepasada por el otro extremo en un número igual; además de la interposición de estas partes medias en los precedentes intervalos, resultaron otros nuevos, tales que cada una valía lo que el precedente multiplicado por uno y medio. Se refiere a la distancia entre la tónica y la dominante de cualquiera de los 24 tonos musicales cuya relación es  $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$  o uno y medio (veces más frecuencia que la tónica). Y continua: o a ese precedente multiplicado también por un y un tercio, es decir:  $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$  o uno y un tercio (veces la frecuencia que la tónica), hace referencia a la distancia entre la tónica y la subdominante. Y sigue narrando: o a ese precedente por uno y un octavo:  $\frac{27}{24} = \frac{9}{8}$  que es la distancia entre la tónica y la sobretónica de cualquier escala musical. Timeo termina narrando que se llenó por medio de intervalos de uno más un octavo los intervalos de uno y un tercio, dejando de cada uno de éstos una parte tal que el número inserto estuviera con el siguiente en la relación de doscientos cincuenta y seis a doscientos cuarenta y tres:  $\frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$ . Este cociente es la unidad musical, es decir que todo sonido en la escala dodecafónica tiene este valor en relación con su siguiente, y este último con el siguiente y así sucesivamente. En la época de los pitagóricos ya se conocían los números irracionales, aunque su simbolización no es la misma que en la actualidad. Así:

$$\frac{2^8}{3^5} \approx \sqrt[12]{2} = 1.059 \dots \quad (10)$$

Desde entonces la simbolización matemática de los sonidos musicales y por consecuencia, el desarrollo de tecnología ha permitido interactuar al ser humano con instrumentos musicales, incluyendo su propia voz. Este hecho, como ya comenté ha seguido el modelo numérico heredado de Egipto y Babilonia, además de haber sido esquematizado por los griegos y es así que con siete nombres de sonidos musicales, las relaciones entre ellos permiten contar con seis tonos, divididos en mitades, lo que generó la escala dodecafónica de la música, cuya constante por cociente entre dos sonidos consecutivos es la "unidad Musical", como la he llamado, correspondiendo al valor 1.059... Con ello, la simbolización matemática de la secuencia de la escala dodecafónica es la siguiente:

Sea  $\lambda = 2^8 = 256$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{0}{12}} \approx 256 \text{ Hz}$ . Tónica correspondiente al sonido do central.

$\lambda \cdot 2^{\frac{1}{12}} \approx 271 \text{ Hz}$ . Correspondiente al sonido do sostenido.

$\lambda \cdot 2^{\frac{2}{12}} \approx 287 \text{ Hz}$ . Sobretónica, correspondiente al sonido re natural, con la razón  $\frac{27}{24} = \frac{9}{8}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{3}{12}} \approx 304.4 \text{ Hz}$ . Correspondiente al sonido re sostenido.

$\lambda \cdot 2^{\frac{4}{12}} \approx 322 \text{ Hz}$ . Mediante, correspondiente al sonido mi natural, con la razón  $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{5}{12}} \approx 341 \text{ Hz}$ . Subdominante, correspondiente al sonido fa natural, con la razón  $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{6}{12}} \approx 362.03 \text{ Hz}$ . Correspondiente al sonido fa sostenido y es la mitad de la escala, o  $\sqrt{2}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 383.56 \text{ Hz}$ . Dominante. Correspondiente al sonido sol natural, con la razón  $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{8}{12}} \approx 406.37 \text{ Hz}$ . Correspondiente al sonido sol sostenido.

$\lambda \cdot 2^{\frac{9}{12}} \approx 430 \text{ Hz}$ . Sobredominante, correspondiente al sonido la natural, con la razón  $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ .

$\lambda \cdot 2^{\frac{10}{12}} \approx 456.14 \text{ Hz}$ . Correspondiente al sonido la sostenido.

$\lambda \cdot 2^{\frac{11}{12}} \approx 483.26 \text{ Hz}$ . Séptima sensible, correspondiente al sonido si natural, con la razón  $\frac{45}{24} = \frac{15}{8}$ .

$\lambda \cdot 2^1 \approx 512 \text{ Hz}$ . Octava. Correspondiente al sonido do natural de la siguiente octava, con razón 2:1.

En general:

$$2^k \lambda \mid k = \left( \frac{\mu}{12}, \text{ con } \mu = (0, 1, \dots, 12) \right) \quad (11)$$

Para la secuencia de la octava central del teclado.

Es así que las octavas más graves se pueden representar con valores negativos, y para aquellas más agudas, con valores mayores a 12. Del desarrollo anterior se puede observar que con base en la repetición de obtener el producto de la frecuencia base por el valor de la expresión  $2^k$ , es posible construir cualquiera de las 12 escalas mayores y por consecuencia, las menores. También es notorio deducir que mientras que los cocientes entre dos sonidos distintos es un número racional  $\mathbb{Q}$ , estos son para los sonidos correspondientes a la tónica, sobretónica, mediante, subdominante, dominante, sobredominante, séptima sensible y por supuesto la octava. Para los otros sonidos el cociente es un número irracional  $\mathbb{Q}'$ . Además, el final del desarrollo de estas expresiones hace ver que la frecuencia base se duplica a lo largo de doce multiplicaciones seguidas con las condiciones anteriormente desarrolladas, es decir la expresión  $\sqrt[12]{2}$  se cumple para cualquier tono musical [10]. Debo además hacer notar que el oído humano ajusta el cociente racional  $\mathbb{Q}$  con los siete nombres de los sonidos musicales pero que en su conjunto son doce distintos de ellos. Las llamadas alteraciones corresponden a sonidos cuyo cociente con relación a la tónica está representado por un número irracional  $\mathbb{Q}'$ . De estos sonidos con cociente racional, están incluidos aquellos que conforman las cadencias perfectas, es decir, la tónica, subdominante, mediante, séptima sensible y la octava.

Con la descripción anterior puedo afirmar que la estructura matemática del lenguaje musical es un campo  $\mathcal{F}$ . Cuando un conjunto de números cumple las propiedades de

las operaciones de adición como la propiedad asociativa, conmutativa, elemento neutro e inverso aditivo, conforman un grupo abeliano  $\mathcal{G}$ . Si a estas propiedades aditivas se incluyen dos propiedades de la multiplicación, como son la asociativa y la distributiva, entonces tenemos un anillo en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ . Al agregar a este anillo otras dos propiedades multiplicativas, como la conmutativa y el neutro multiplicativo, entonces ya tenemos un anillo conmutativo en el conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$ . Finalmente, si a este anillo conmutativo agregamos la propiedad del inverso multiplicativo, entonces ya tenemos un campo  $\mathcal{F}$  en el conjunto de los números Reales  $\mathbb{R}$  [11] [12] [13]. Además este hecho está plenamente justificado con el trabajo matemático realizado por Jakob Bernoulli con relación a una gráfica polar que permite observar la secuencia de sonidos en la escala musical bien temperada entre los años 1732 y 1740. Esta gráfica es conocida como la espiral logarítmica y su ecuación es:

$$r = e^{a\theta} \quad (12)$$

En la que  $r$  es el segmento de recta que parte del origen o polo,  $e$  es el número de Euler o el logaritmo natural o hiperbólico,  $a$  es la constante y  $\theta$  es el argumento o amplitud del ángulo. Como el argumento del ángulo es  $\frac{\pi}{6}$ , se tiene un conjunto de 12 divisiones de la circunferencia, cuyo radio va aumentando en razón de la constante  $\sqrt[12]{2}$ , de tal forma que:

$$(12) \left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi \quad (13)$$

Es decir, que completó una vuelta a la circunferencia inicial, con aumento de los radios cada  $\frac{\pi}{6}$  o  $30^\circ$ . Esta es la representación gráfica del hecho que justifica la división en doce semitonos exactos para cualquier escala musical [14], gráfica conocida como la hermosa curva llamada espiral logarítmica. En el contexto musical la expresión (12) se relaciona estrechamente con el gran trabajo de Juan Sebastián Bach, “El Clavecín bien Temperado”, obra escrita entre 1720 y 1745, aproximadamente, en el que dedica un preludio y una fuga para cada uno de los doce tonos mayores y los 12 tonos menores, es decir, 24 preludios y 24 fugas recopilados en dos volúmenes, pues el desarrollo tecnológico de este instrumento permitía, a partir de mediados del siglo XVIII su ejecución, sólo con la lectura de la partitura y usando este único teclado del clavecín [15] (el primer tomo editado en 1722 y el segundo en 1745), y que en matemática pura se ha analizado y derivado en los sistemas tonales de Petzval, por ejemplo [16]. Antes de esto la división de los tonos no era exactamente única, sino que variaba de uno a otro. Por ejemplo, de do a re, existía una diferencia de frecuencias de  $\frac{9}{8}$ ; entre el re y el mi la diferencia era de  $\frac{10}{9}$ ; pero entre el mi y el fa, un semitono, la diferencia era de  $\frac{16}{15}$ ; entre fa y sol se repite el valor entre do y re; entre sol y la su relación es la misma que entre re y mi; entre la y si vuelve a ser la relación de do y re; entre si y do, un semitono, la relación es de  $\frac{16}{15}$ ; como se aprecia, entonces, en aquella división de la escala musical existían dos tipos de valores para los tonos y un valor

diferente para los semitonos, de ahí la importancia del desarrollo y contribución de la expresión  $r = e^{a\theta}$  así como su gráfica, la espiral logarítmica, y su aplicación a la escala musical pues permite observar con facilidad la equalización en un valor único el semitono de la escala dodecafónica (es decir, ajustar el mismo valor para cada semitono en que se divide la escala dodecafónica, aunque este valor ya lo había establecido Timeo). La estrecha relación de la forma polar de una expresión matemática con el campo extendido de los números Reales  $\mathbb{R}$ , al campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , me lleva a reflexionar sobre la relación que puede existir en este campo con la descripción matemática de la escala musical.

Esta tarea reflexiva me vuelve a adentrar en la cultura griega. Hace unos 2,500 años Filolao, un erudito seguidor de la escuela pitagórica continúa el estudio de la armonía iniciada precisamente en esta escuela; también es justo mencionar la profundidad en el estudio de la armonía pitagórica realizada por el gran matemático Arquitas, discípulo de la escuela de Filolao; Aristógenes de Tarento escribe la magnífica obra “Elementa harmónica” o elementos de armonía unos 2,300 años antes del presente, obra dividida en tres libros, aunque el último, en gran parte se ha perdido. Este tratado se ha considerado el más antiguo en su género, y explica claramente la idea de intervalo musical, además de clasificarlos como diatónico, enarmónico y cromático. En el primer libro trata de las generalidades y orígenes de la música griega; en el segundo libro propone una catalogación de la música en un conjunto de siete términos: origen de los sonidos, los intervalos, los sonidos como secuencia melódica, los sistemas, los modos, las mutaciones y la melopea. Un notable discípulo de Aristóteles, Teofrasto, indagó mucho sobre la melodía, hace unos 2,200 años; la información que selecciona excelentemente Barker [17] refiere que Diógenes Laertius recopiló en su catálogo de obras las siguientes: “Sobre Música”, en tres libros, “Armonía” y “Sobre Músicos”. Y aunque mucho de este material se ha perdido, sobreviven algunos de sus fragmentos. Por ejemplo, en la obra “Sobre Música”, afirma que Teofrasto escribió que la naturaleza de la música es un movimiento del alma, relacionado con las emociones, y aunque estas ideas son debatibles, la relación entre música y melodía se originan dentro de cada ser humano. Con relación a la aritmética, Teofrasto comenta que la precisión de la relación entre los intervalos se basa en las razones entre los números; confirmaba que la relación de la tónica con la octava es 2:1; de la tónica con la dominante es 3:2 y con la cuarta justa, 4:3, como ya he analizado.

Ahora, retomo la idea del campo  $\mathcal{F}$  de los números complejos  $\mathbb{C}$ , en el sentido cronológico de la intervención de autores griegos relacionados con la música y la matemática. Es la ciudad de Alejandría hace unos 1900 años. Cuando el egiptólogo ruso V. S. Golenishchev, descubrió el famoso documento conocido después como el Papiro de Moscú en 1893, su contenido fue finalmente traducido hasta cerca de 1930, por lo que a partir de ese año se pudieron leer los problemas escritos ahí [18]. El número 14 de ellos, ofrece un ejemplo numérico específico sobre cómo calcular el volumen  $V$  de una pirámide cuadrangular truncada o *frustum* como se le suele llamar. Este ejemplo sugiere que los antiguos egipcios ya conocían la expresión:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2) \quad (14)$$

Donde  $a$ ,  $b$  representan los lados de los cuadrados de la base de la pirámide y el cuadrado formado con el corte de la pirámide a cierta altura, respectivamente;  $h$  es la altura del sólido geométrico. Como el problema era en esa época ya muy antiguo, se dieron varios intentos por resolver el ejemplo, sin embargo fue Herón quien primeramente lo analizó y propuso solución. Se percató que lo más conveniente era reescribir (14) en términos de la altura y tomar en cuenta otra variable,  $c$ , es decir la longitud del vértice inclinado de la pirámide, así:

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}. \quad (15)$$

Así, realizó los cálculos con diferentes valores para las variables escritas en (15). De acuerdo con los manuscritos que analizó W. W. Beman en su artículo "A chapter in the History of Mathematics" en *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science* 46 (1897)/33 – 50 [18], cuando se tiene que :  $s = 28$ ;  $b = 4$ ;  $c = 15$ , y al sustituir en la expresión (15), se tiene:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{15^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(12)^2} = \sqrt{225 - 288} \\ &= \sqrt{-63} \end{aligned} \quad (16)$$

Con base en su investigación, Bernan interpreta dos posibilidades sobre el resultado que obtuvo Herón: 1) el desuso que se tenía de este tipo de expresión (raíz cuadrada de un número negativo), lo que condujo a Herón a ignorar el signo negativo e interpretar el resultado como la raíz cuadrada de un número positivo. 2) error de los copistas del trabajo original de Herón quienes, también al desconocer el significado matemático de la expresión interpretaron el resultado de la misma forma. Pero es un hecho que Herón fue el primero en obtener en una expresión matemática la raíz cuadrada de un número negativo. Más de 13 siglos después, otros investigadores abordaron el tema de este tipo de número, como Scipione del Ferro, Nicolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli, Francois Viete; luego de ellos, Descartes, John Wallis y Caspar Wessel, este último como una interpretación geométrica de los números complejos. Desde entonces se puede afirmar que  $\sqrt{-x}$  con  $x \in \mathbb{Z}^+ \nexists$  en el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números Reales. Entonces, el conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  queda definido así:

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y\}. \quad (17)$$

La expresión matemática de un número complejo, con la parte real representada por  $x$ , la parte imaginaria por  $iy$ , es:  $z = x + iy$ , con  $i = \sqrt{-1}$ . De ello se desprende la siguiente afirmación:  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . De acuerdo con las propiedades de campo de los números complejos, las operaciones de adición,

sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación están definidas y por tanto existen para los números complejos [11]. Una representación intuitiva de los números Reales y Complejos ha sido la geométrica, muy útil para percibir fácilmente las relaciones entre los números con base en sus operaciones. Es así que  $z = x + iy$  se puede identificar por el punto  $(x, y)$  en el  $xy$ -plano de  $\mathbb{R}^2$  conocido como plano complejo o gaussiano [11]. Es conocido que John Wallis intentó encontrar la mejor representación geométrica de los números complejos. Pero fue el noruego Caspar Wessel (1745 – 1818) quien finalmente propone la representación geométrica que actualmente está vigente [18]. Wessel no fue matemático profesional sino que se dedicó a la topografía, y justamente el hecho de encarar la necesidad de resolver problemas prácticos en la realización de los mapas lo llevaron a proponer dicha interpretación geométrica de los números complejos. El viernes 10 de marzo de 1797 fue presentado el artículo titulado "Sobre la representación analítica de la Dirección: Un intento" ante la Real Academia de Ciencias Danesa. Un dato interesante es el hecho de que en este artículo aparece también como co-autor el presidente de la sección de ciencias de dicha academia, pues al no ser Wessel miembro de ella, era necesario un buen aval para su aceptación. El dictamen de los evaluadores fue tan bueno que se seleccionó como el primer artículo para ser publicado en las Memorias de la Academia de 1799 [18]. Escrito en danés, tuvo poco impacto fuera de ese país, así que fue hasta 1895 cuando se redescubrió este brillante artículo y es cuando se le reconoce su talento. Nahim comenta que el artículo original de Wessel fue extraído de Dinamarca por un anticuario, además de que su impacto y significancia fue avalada por el matemático danés Sophus Christian Juel (1855 – 1935). Para profundizar sobre el redescubrimiento del documento de Wessel también cita Nahin la obra de Viggo Brun "Caspar Wessel y la introducción geométrica de los números complejos" (en francés) publicado en *Reveu d'Historie des Sciences et de Leurs Applications* 12 (1959): 19 – 24,. Siguiendo la propuesta de Wessel, analizo la representación geométrica de la operación de radicación en el campo de los números complejos y su relación con la representación de los tonos musicales y la distancia sonora entre los semitonos temperados.

Para ello retomo un caso un poco más sencillo con el propósito de ilustrar la idea anterior. El convenio de representación de la unidad imaginaria es:  $i = \sqrt{-1}$ . De esta igualdad se pueden obtener las siguientes expresiones:  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ ;  $i^4 = 1$ . En general:

$$i^m = i^n \leftrightarrow m \equiv n \pmod{4} \quad (18)$$

Sea  $z = 1 + i$  la unidad imaginaria. Es posible graficar en el plano complejo las siguientes expresiones:  $i^0z = z$ ;  $iz$ ;  $i^2z$ ;  $i^3z$ ;  $i^4z$ :

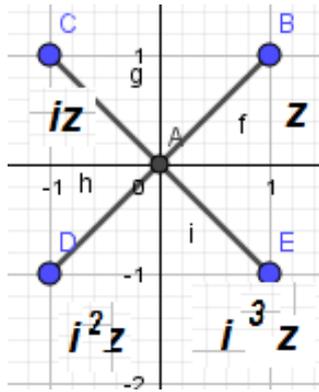


Figura 1. Gráfica de la unidad imaginaria  $z = 1 + i$

Tal como Wessel lo propuso en la actualidad el significado de la gráfica en el plano complejo es el mismo. El valor del número Real se grafica sobre el eje de la abscisa y el valor del número imaginario sobre el eje de la ordenada. Así, la magnitud de cualquiera de los vectores  $z, iz, i^2z, i^3z, i^4z$  también llamado módulo es:  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , simbolizado  $|z|$ , y este resultado se basa en la proposición 47 del Libro 1 de Euclides. La amplitud del ángulo también llamado argumento entre cualquiera dos de los vectores es igual a  $\frac{\pi}{2}$  o  $90^\circ$ . Recuérdese que ésta última equivalencia se debe a la expresión general correspondiente al perímetro de una circunferencia:  $2\pi r = 360^\circ$ . Por ello, la expresión  $2\pi$  representa los  $360^\circ$  y con base en ello se realizan las conversiones necesarias. Hago notar que el vector que representa  $i^4z$  coincide con el que representa  $i^0z = z$ . En otras palabras, describe un ciclo o vuelta a la circunferencia en los puntos de módulo  $\sqrt{2}$ , pero con amplitudes  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ . Éste último valor coincide con el primer valor, pero un ciclo después. Es decir:

$$2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \quad (19)$$

Al unir con segmentos de recta los puntos extremos de los vectores, tenemos:

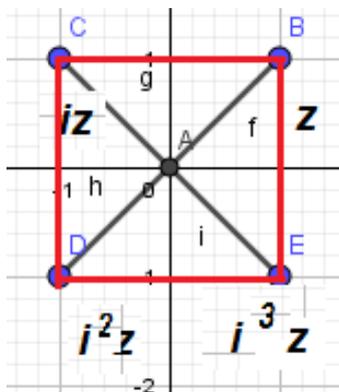


Figura 2. La unión de los vectores por sus puntos extremos genera un cuadrado

Para describir mi aportación al presente estudio, debo remitirme al Teorema de DeMoivre de las raíces de números complejos [11].

Para ello debo aclarar que la forma polar de un número complejo se representa:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \quad (20)$$

Donde:  $x = r \cos \theta ; y = r \operatorname{sen} \theta ; r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta = \arctan \frac{y}{x}$ . También aclaro lo siguiente:  $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = e^{i\theta}$ .

Teorema 1.

$z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \rightarrow \exists$  exactamente  $n$  distintas  $n$ -ésimas raíces de  $z$ . Si  $z = re^{i\theta}$ , entonces  $w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k/n)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Prueba.

$n \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{C}$ . Además  $z = w^n \rightarrow w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ .  $r \in \mathbb{R}, r > 0 \rightarrow \exists$  una raíz de  $z$ , y una raíz real de  $r$ .

También de (21) tenemos que  $z = re^{i\theta} \rightarrow w = r^{1/n} e^{i\theta/n}$  satisface  $w = z^{1/n}$  con una  $n$ -raíz del número complejo  $z$ .

Pero,  $\frac{\theta + 2\pi k}{n} < 2\pi$  para  $k \in \mathbb{N} \rightarrow w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k/n)}$  es también una  $n$ -ésima raíz de  $z$  diferente de  $w$ . Al existir precisamente  $n$  valores de  $k$  se producen  $n$ -ésimas raíces distintas de  $z$ .

■

Ahora, sea  $z = 1 + i$ , calcular  $z^{1/6}$ .

En su forma polar,  $z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ , y por Teorema 1, se tiene:

$$\begin{aligned} w_1 &= (2^{1/2})^{1/6} e^{i\frac{\pi/4}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{24} \right) \\ w_2 &= 2^{1/12} e^{i\frac{\pi/4+2\pi}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{9\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{24} \right) \\ w_3 &= 2^{1/12} e^{i\frac{\pi/4+4\pi}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{17\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{17\pi}{24} \right) \\ w_4 &= 2^{1/12} e^{i\frac{\pi/4+6\pi}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{25\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{25\pi}{24} \right) \\ w_5 &= 2^{1/12} e^{i\frac{\pi/4+8\pi}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{33\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{33\pi}{24} \right) \\ w_6 &= 2^{1/12} e^{i\frac{\pi/4+10\pi}{6}} = 2^{1/12} \left( \cos \frac{41\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{41\pi}{24} \right) \end{aligned}$$

Es fácil observar que el valor del argumento va aumentando en razón de  $\frac{\pi}{3}$  o  $60^\circ$ , mientras que el módulo permanece invariante. La representación gráfica de las seis raíces de  $z$ , es:

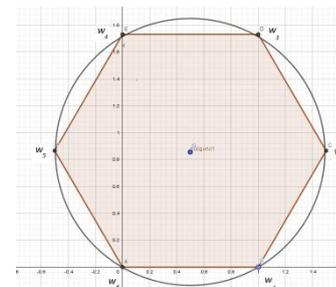


Figura 3. Gráfica que representa las seis raíces de  $z = 1 + i$

En relación con la teoría musical, este resultado en el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos, puede interpretarlo de la siguiente manera:

- 1) El índice de la raíz es  $\frac{1}{6}$ , justamente el exponente de la base 2 en la expresión  $2^{1/6}$  y que al ser el factor de una frecuencia correspondiente a un sonido musical expresa el siguiente tono, para cualquier elemento de la escala musical temperada. Así, la frecuencia correspondiente al do central es 256 Hz. Este valor multiplicado por  $2^{1/6}$  expresa:  $(256)(2^{1/6}) = 287 \text{ Hz.}$ , correspondiente al sonido de la nota re natural. Para obtener el mi natural, se repite esta operación, a partir de la frecuencia de la nota re. Esto sucede para todos los 12 tonos mayores y los 12 tonos menores de la escala temperada.
- 2) El módulo  $|z| = 2^{1/2}$  que relacionado con el índice de la raíz, se tiene:  $(2^{1/2})^{1/6} = 2^{1/12}$  que representa la distancia exacta entre dos semitonos en la escala temperada para cualquiera de los 24 tonos mayores y menores.
- 3) La gráfica de la expresión  $(1+i)^{1/6}$  tiene seis raíces (por Teorema 1), por lo que genera un hexágono regular inscrito en un círculo. Cada vértice del hexágono corresponde a una solución, por lo que cada vértice representa el sonido de un tono de la escala. Al haber seis vértices, se está representando los seis grados de cualquier escala temperada. Así, en la escala de Do Mayor,  $w_1$  representa el sonido do;  $w_2$  el sonido re;  $w_3$  al sonido mi;  $w_4$  al sonido fa sostenido (que representa la mitad de la escala y en el gráfico, su argumento corresponde a  $\pi$  radianes o  $180^\circ$ ;  $w_5$  representa al sonido sol sostenido;  $w_6$  al sonido la sostenido, así termina el ciclo e inicia otro en  $w_1$ .
- 4) Al relacionar esta gráfica con aquella que describe la espiral logarítmica descrita anteriormente, el argumento en esta última es  $\frac{\pi}{6}$  que corresponde a la división en 12 partes iguales de la escala temperada, por (14).
- 5) En la expresión  $(1+i)^{1/6}$  están representadas las siguientes unidades:  $1 \in \mathbb{Q}$ ;  $|1+i| = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$  y por tanto,  $\mathbb{R}$ ;  $i$  es la unidad imaginaria;  $1+i$  es la unidad compleja;  $2^{1/12}$  es la unidad musical:  $\mathfrak{M} = 2^{1/12}$ .

El denominador del argumento del conjunto solución  $(w_1, w_2, \dots, w_6)$  está expresado en módulo 24, es decir que un ciclo sobre la gráfica (fig. 3), lo que permite analizar que  $\frac{\pi}{24}$  representa un tono. Al existir doce tonos mayores y 12 menores, los 24 tonos están representados en cada ciclo, es decir, en  $2\pi$  radianes. En el hexágono regular inscrito  $\frac{\pi}{24}$  representa un preludio, otro  $\frac{\pi}{24}$  una fuga, de tal manera que todos los preludios y fugas del Clavecín bien Temperado de Bach, en total 48 están incluidos en  $2\pi$ , ya que el argumento

de  $w_6$  es  $\frac{41\pi}{24}$  por lo tanto el ciclo se completa con otros  $\frac{8\pi}{3}$  más, y por ello concluye en  $\frac{49\pi}{24}$ .

### III. CONCLUSIONES.

La expresión  $(1+i)^{1/6}$  fue interpretada por los pitagóricos, en otro contexto y con otro lenguaje, y que bella y poéticamente describió Platón en el maravilloso diálogo en el que participa Timeo, y que la palabra *unidad* toma justamente este contexto. El resultado de  $(1+i)^{1/6}$  evidencia la estructura de las escalas musicales en todos los tonos mayores y menores, y también justifica la división de ésta en semitonos, además de incluir en sus argumentos el módulo 24 relacionado con la primera obra compuesta para la escala bien temperada por Bach. Este análisis bien puede tomar otras direcciones de investigación [19]. Inclusive, este modelo matemático pudiera también contribuir a la descripción de la música atonal que ha investigado Hebert Vázquez, entre otros, [20]; la música microtonal, iniciada por Julián Carrillo [21]. Su propuesta también toma en cuenta los seis tonos, como en la escala dodecafónica, pero realiza la partición de cada tono en tercias, cuartas, quintas, etc., partes de él [22] [23], es decir que la variante está en el índice del radical del módulo y del argumento de la unidad compleja. Inclusive se abre la posibilidad de que al aplicar  $n$  divisiones a los seis grados de la escala no sólo se duplique la tónica sino que también se pueda triplicar, cuadruplicar, quintuplicar, *n-plificar* ésta, generando una gran gama de posibilidades para la composición musical, aunque para ello, deba apoyarse de las tecnologías digitales.

“Sin memoria no hay historia y sin historia el presente es incomprendible”[24].

### REFERENCIAS

- [1] Wolfe, K. The singing Voice demands a Scientific Middle C. 21st Century Science & Technology. Winter 1999 – 2000 (pp. 13 – 25). 21st Century Science Associates Press. Washington D. C. (1999).
- [2] Lindley, M & Turner-Smith, R. Mathematical Model of Musical Scales. A new Approach. Verlag für systematische Musikwissenschaft GmbH. Bonn. (1993).
- [3] Salazar, A. La música en la Cultura Griega. El Colegio de México. Cd. De México. (1954).
- [4] Bodmer, F. The Loom of language. Farrar and Rinehart, Inc. N. Y. (1944).
- [5] Platón. Diálogos. Colección sepan cuántos. Editorial Porrúa. Cd. De México. (Ed. 1986).
- [6] Platón. Diálogos. Colección Biblioteca Clásica. Editorial Gredos. Madrid. (Ed. 2015).
- [7] Herrera-Armendia, F.G. La música, las matemáticas y la computación. Revista Electrónica Episteme de la Universidad del Valle de México. Año 2 No. 1, Octubre- Diciembre de 2004. Ciudad de México.
- [8] Danhauser, A. Teoría de la Música. Conservatorio Nacional de Música. Ciudad de México. (1941).
- [9] Michael, D. Diccionario Harvard de Música. Editorial Diana. Ciudad de México. (1991).
- [10] Goñi, M. Revista Alta Fidelidad. Fascículo No.30. Editorial Nueva Lente. Madrid. (Editor Director. 1980).

- [11] Fine, B. & Rosenberger, G. The Fundamental Theorem of Algebra. Springer. N. Y. (1997).
- [12] Mazzola, G. Geometrie der Töne. Elemente der Mathematischen Musiktheorie. Birkhäuser. Basel. (1990).
- [13] Loy, G. Musimathics. The Mathematical foundations of Music. Vol. 1. MIT Press. Cambridge, MA. (2006).
- [14] Maor, E. e: The Story of a Number. Princeton University Press. Princeton, N.J. (1997).
- [15] Bach, J. S. The Well – Tempered Clavier. 48 Preludes and Fugues. Complete. Books I and II. For Piano. Edited and fingered by Carl Czerny. Schirmer’s library of Musical Classics. U.S.A. (1897 C.R.).
- [16] Haluska, J. The Mathematical Theory of Tone Systems. Marcel Dekker Inc. Slovak. (2004).
- [17] Barker, A. Harmonics in Classical Greece. Cambridge University Press. Cambridge, MA. (2007).
- [18] Nahin, P.J. An Imaginary Tale. The Story of  $\sqrt{-1}$ . Princeton University Press. Princeton, N.J. (1998).
- [19] Peck, R.  $N^{\text{th}}$  roots of Pitch – Class Inversion. Mathematics and Computation in Music. Third International Conference, MCM 2011. Paris France, Jun 2011 Proceedings. Springer Verlag. N. Y. (2011).
- [20] Vázquez, H. Fundamentos teóricos de la música atonal. Editorial UNAM. Ciudad de México. (2006).
- [21] Carrillo, J. Teoría Lógica de la Música. Edición Julián Carrillo. Ciudad de México. (1954).
- [22] Herrera-Armendia, F.G. & Fajardo-Rendón, M. Digital Technology in Julian Carrillo’s Microtonal Music Research. Special Panel: “Mathematics and Aesthetics in Julian Carrillo’s (1875 – 1965) work”. International Congress on Music and Mathematics. Puerto Vallarta, Mexico, November 26 -29, 2014. Universidad de Guadalajara Press. (2014).
- [23] Jordan, N. Microtonality and the music of Julian Carrillo from a Xenharmonic Perpspective. Special Panel: “Mathematics and Aesthetics in Julian Carrillo’s (1875 – 1965) work”. International Congress on Music and Mathematics. Puerto Vallarta, Mexico, November 26 -29, 2014. Universidad de Guadalajara Press. (2014).
- [24] González-Roaro, B. Presentación. En voz alta. Testimonios de Medio siglo. Coordinador General: Roberto Figueroa Martínez. ISSSTE. Ciudad de México.(2006).

*Journal de*  
*Objetos y*  
*Objetivos*  
*M*atemáticos